

**Anna DEMIANIUK, Tomasz Janusz TELESZEWSKI**

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: a.b.demianiuk@10g.pl, t.teleszewski@pb.edu.pl

## **Modelowanie konwekcji wymuszonej w kolektorach słonecznych metodą elementów brzegowych**

### 1 Wstęp

W płaskich kolektorach słonecznych oraz w kolektorach z reflektorami wykorzystuje się przejmowanie ciepła przez przewody prostoliniowe [1]. Przepływ newtonowskiego płynu rzeczywistego jest opisany układem równań różniczkowych wynikających z zasad: zachowania masy (1), momentu pędu (2) i energii (3) [2]:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \nu \nabla^2 \mathbf{u} = \bar{\rho} \mathbf{g}; \quad \bar{\rho} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g}, \quad (2)$$

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\lambda}{\rho c_p} \nabla^2 T + \frac{\nu}{c_p} \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \quad (3)$$

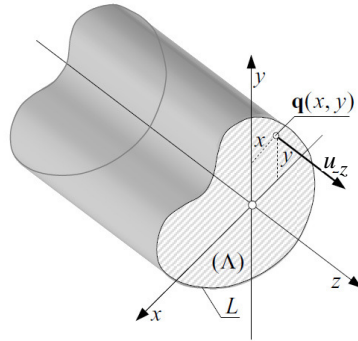
gdzie:  $\mathbf{u}$  oznacza prędkość przepływu,  $p$  ciśnienie,  $\mathbf{g}$  -wektor przyspieszenia ziemskiego,  $\rho$  jest gęstością cieczy,  $\mu$  oraz  $\nu = \mu/\rho$ , oznacza odpowiednio dynamiczny i kinematyczny współczynnik lepkości,  $c_p$  jest ciepłem właściwym,  $\lambda$  jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, natomiast  $\tau_{ij}$  jest tensorem naprężeń lepkich.

W praktyce w przewodach układu roboczego kolektorów słonecznych przepływ czynnika jest laminarny. Analizę zagadnień dla przepływu laminarnego w układach wymiany ciepła kolektora płaskiego można znaleźć w wielu opracowaniach, dotyczących m.in. pracy płaskiego kolektora słonecznego w warunkach nieustalonej wymiany ciepła [3], rozkładu prędkości w przewodach kolektora o rurkach w układzie poziomym [4], jak również w kolektorach skupiających [5]. W przypadku stacjonarnego w pełni rozwiniętego laminarnego przepływu jednokierunkowego w przewodzie prostoosiowym równania (1-3) ulegają uproszczeniu (rys.1):

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = -\Delta P; \quad \Delta P = \frac{-1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z}; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\nabla^2 T = \frac{\rho c_p}{\lambda} \Delta T_z u_z \quad ; \quad \Delta T_z = \frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{\lambda} q_z = \text{const} \quad (6)$$



Rys. 1. Szkic obrazujący zagadnienia brzegowe w przepływach przez przewody prostoliniowe

Fig. 1. A sketch to consideration of boundary conditions for a straight pipe flow

Po sformułowaniu zagadnienia opisanego przedstawionym wyżej układem równań różniczkowych, przy użyciu brzegowych równań całkowych opisujących pola prędkości przepływu w przewodach układu hydraulicznego i pola temperatury w strumieniu płynu, gęstość strumienia ciepła wewnątrz przewodu wyznacza się przez numeryczne różniczkowanie pola temperatury:

$$q_x = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x}, \quad (7a)$$

$$q_y = -\lambda \frac{\partial T}{\partial y}. \quad (7b)$$

Linie przepływu ciepła (adiabaty) wyznacza się, całkując składowe strumienia ciepła zgodnie z zależnością:

$$d\Xi = q_x dy - q_y dx. \quad (8)$$

Na kanwie proponowanego wyżej algorytmu zrealizowano program obliczeniowy do rozwiązywania złożonych zagadnień obliczeniowych przepływu laminarnego z wymianą ciepła przez przewodzenie. W opracowaniu przedstawiono rozwiązanie zagadnienia walidacji algorytmu obliczeniowego i przykłady obliczeń układów przepływowych kolektorów słonecznych. W obliczeniach cieplnych przyjęto zerowy strumień ciepła między przewodem kolektora a izolacją oraz założono stałą temperaturę ścianki przewodu między ścianką przewodu a warstwą powietrza w kolektorze słonecznym.

## 2 Brzegowe równania całkowe wymiany ciepła w przepływie laminarnym przez przewody prostoosiowe w kolektorach słonecznych

W pierwszej kolejności wyznacza się pole prędkości w przekroju poprzecznym ( $\Lambda$ ) przewodu prostoosiowego. Metoda elementów brzegowych wyznaczania pól prędkości w przewodach prostoosiowych została przedstawiona w publikacjach [6, 7], natomiast w przewodach kolektorów słonecznych w pracach [8, 9].

Zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego (6) formułuje się w postaci złożonego warunku brzegowego Dirichleta i Neumanna, zakładającego znane wartości temperatury  $T_s(\mathbf{q})$  na części brzegu  $L_T$  i znane wartości strumienia ciepła  $q_s(\mathbf{q})$  na części brzegu  $L_Q$  oraz wyznaczone uprzednio pole prędkości  $\Lambda$  (rys.1):

$$\begin{aligned}
 -\chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_{L_Q} T(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \frac{1}{\lambda} \int_{L_T} q(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} = \\
 -\frac{1}{\lambda} \int_{L_Q} q_s(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \int_{L_T} T_s(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \frac{\rho c_p}{\lambda} \Delta T_z \iint_{\Lambda} u(\mathbf{v})G(\mathbf{v}, \mathbf{q})dA_{\mathbf{v}}
 \end{aligned} \tag{9}$$

$(\mathbf{p}), (\mathbf{q}) \in L ; (\mathbf{v}) \in \Lambda ,$

gdzie: dla brzegu gładkiego  $\chi(\mathbf{p})=1/2$ .

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right) ; \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| , \tag{10a}$$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{p}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_{\mathbf{q}} - x_{\mathbf{p}})n^x + (y_{\mathbf{q}} - y_{\mathbf{p}})n^y}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2} . \tag{10b}$$

Po wyznaczeniu wartości temperatury  $T(\mathbf{p})$  i strumienia ciepła  $q(\mathbf{p})$ , na brzegu obszaru w punktach  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{q}$ , temperaturę w dowolnym punkcie ( $\mathbf{v} \in \Lambda$ ) rozpatrywanego obszaru wyznacza się ze związku całkowego:

$$T(\mathbf{v}) = \int_L T(\mathbf{q})H(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\lambda} \int_L q(\mathbf{q})G(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \frac{\rho c_p}{\lambda} \Delta T_z \iint_{\Lambda} u(\mathbf{v})G(\mathbf{v}, \mathbf{w})dA_{\mathbf{w}} \tag{11}$$

Średni strumień ciepła na brzegu  $L$  jest wyznaczany z zależności:

$$q_m = \frac{1}{L} \int_L q(\mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} ; \quad (\mathbf{q}) \in L . \tag{12}$$

Po uwzględnieniu zależności (7a, 7b) i (11) składowe strumienia ciepła wyznacza się z zależności [10]:

$$q_x(\mathbf{v}) = \lambda \int_L T(\mathbf{q}) \left( \frac{\partial H(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial x} \right)_{\mathbf{v}} dL_{\mathbf{q}} - \int_L q(\mathbf{q}) \left( \frac{\partial G(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial x} \right)_{\mathbf{v}} dL_{\mathbf{q}} =$$

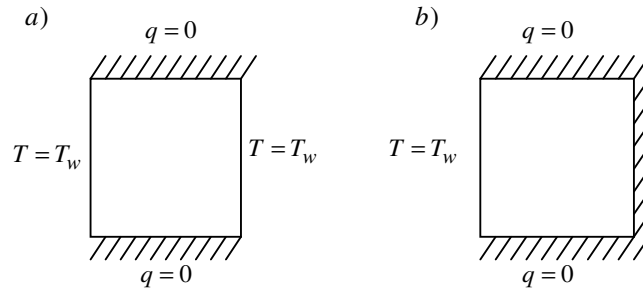
$$- \rho c_p \Delta T_z \iint_A u(\mathbf{v}) \left( \frac{\partial G(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\partial x} \right)_{\mathbf{v}} dA_{\mathbf{w}} \quad (13a)$$

$$q_y(\mathbf{v}) = \lambda \int_L T(\mathbf{q}) \left( \frac{\partial H(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial y} \right)_{\mathbf{v}} dL_{\mathbf{q}} - \int_L q(\mathbf{q}) \left( \frac{\partial G(\mathbf{v}, \mathbf{q})}{\partial y} \right)_{\mathbf{v}} dL_{\mathbf{q}} =$$

$$- \rho c_p \Delta T_z \iint_A u(\mathbf{v}) \left( \frac{\partial G(\mathbf{v}, \mathbf{w})}{\partial y} \right)_{\mathbf{v}} dA_{\mathbf{w}} \quad (13b)$$

### 3 Weryfikacja numerycznego modelu MEB

Weryfikację przedstawionego algorytmu wykonano, porównując rozwiązanie MEB ze znanym rozwiązaniem konwekcji wymuszonej w przewodach prostoosiowych z zadanymi ściankami adiabatycznymi [11]. Porównano wyznaczone liczby Nusselta dla zagadnienia przepływu przez kanał o przekroju kwadratowym, na obwodzie którego założono w pierwszym przypadku dwie równoległe ścianki izolowane i dwie ścianki ogrzewane (rys.2a) oraz w drugim przykładzie trzy ścianki o zerowym strumieniu ciepła i jedną ogrzewaną (rys. 2b).



Rys. 2. Warunki brzegowe w przepływach przez przewód prostoliniowy o przekroju kwadratowym: a) dwie równoległe ścianki ogrzewane, b) jedna ścianka ogrzewana

Fig. 2. Sketch to consideration of boundary conditions for square duct flow: a) two parallel sides heated, b) one side heated

Kryterialna liczba Nusselta definiowana jest zależnością [1]:

$$Nu = \frac{q_w D_h}{\lambda(T_w - T_m)} ; \quad D_h = \frac{4A}{L} ; \quad T_m = \frac{1}{\Lambda u_m} \int_A cT dA , \quad (14)$$

gdzie:  $D_h$  jest średnicą hydrauliczną,  $L$  – obwodem przewodu,  $A$  – polem powierzchni przekroju poprzecznego przewodu, natomiast  $T_m$  – średnią masową temperaturą płynu.

W przypadku przepływów przez przewody prostoliniowe z zadanymi warunkami adiabatycznymi na ściankach wymiar charakterystyczny  $D_h$  jest zmodyfikowany poprzez zastąpienie obwodu  $L$  przekroju poprzecznego przewodu tzw. obwodem ogrzewanym  $L_h$  z wyłączeniem ścianek izolowanych [10,11]:

$$Nu^* = \frac{q_w D_h^*}{\lambda(T_w - T_m)} ; \quad D_h' = \frac{4A}{L_h} . \quad (14a)$$

W obliczeniach przy użyciu prezentowanej metody elementów brzegowych przyjęto brzeg złożony z 1000 elementów. Błąd rozwiązania metody elementów brzegowych dla liczby Nusselta wyznaczono z zależności:

$$\delta Nu'_{MEB} = \left| \frac{Nu'_{TEO} - Nu'_{MEB}}{Nu'_{TEO}} \right| * 100\% , \quad (15)$$

gdzie:  $Nu'_{MEB}$  jest to liczba Nusselta wyznaczona metodą elementów brzegowych, natomiast  $Nu'_{TEO}$  jest rozwiązaniem teoretycznym [10].

W tabeli 1 zestawiono błąd metody MEB dla prezentowanych przykładów. Przy zaokrągleniu wyniku do trzech miejsc po przecinku otrzymano zerowy błąd metody elementów brzegowych.

*Tab. 1. Liczba Nussleta  $Nu'$  w prezentowanych przykładach w przepływach przez przewód prostoliniowy o przekroju kwadratowym - błąd rozwiązania MEB*

*Tab. 1. Nusselt number  $Nu'$  in laminar flow in a pipe with square cross section - error analysis applied in BEM*

Zagadnienie	$Nu'$ [8]	$Nu'$ MEB	Błąd %
-	-	-	-
Przekrój kwadratowy z dwiema równoległymi adiabatycznymi ściankami	4,095	4,095	0
Przekrój kwadratowy z trzema adiabatycznymi ściankami	2,686	2,686	0

4 Przykłady obliczeniowe. Symulacja pól temperatury i linii przepływu ciepła w kolektorze płaskim w układzie przewodów o kołowym przekroju poprzecznym

Poniżej przedstawiono przykład obliczeniowy symulacji przepływu ciepła wewnątrz okrągłych rur kolektora płaskiego w zależności od stopnia zagłębienia przewodów w izolacji. Budowa i przykładowe przekroje badanego kolektora zostały przedstawione na rysunkach 3a-c. Do obliczeń przyjęto parametry pracy kolektora:  $T_w=50^\circ\text{C}$ , przepływ roztworu glikolu etylenowego (34%);  $\mu=0,00254\text{ Pa s}$ ;  $\rho=1051,0\text{ kg/m}^3$ ;  $\lambda=0,4897\text{ W/(m}\cdot\text{K)}$ ;  $c_p=3170,0\text{ J/(kg K)}$ ;  $\text{Re}=200$ .

Symulacje wykonano w funkcji charakterystycznego wymiaru stosunku wysokości  $h$  zagłębienia przewodu w izolacji do średnicy przewodu  $D$ . Wyznaczone liczby Nusselta  $\text{Nu}$  i  $\text{Nu}'$  w funkcji  $h/D$  przybliżono funkcją wymierną:

$$\text{Nu}, \text{Nu}' = \frac{a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4}{1 + fx + gx^2 + hx^3 + ix^4 + jx^5}, \quad (16)$$

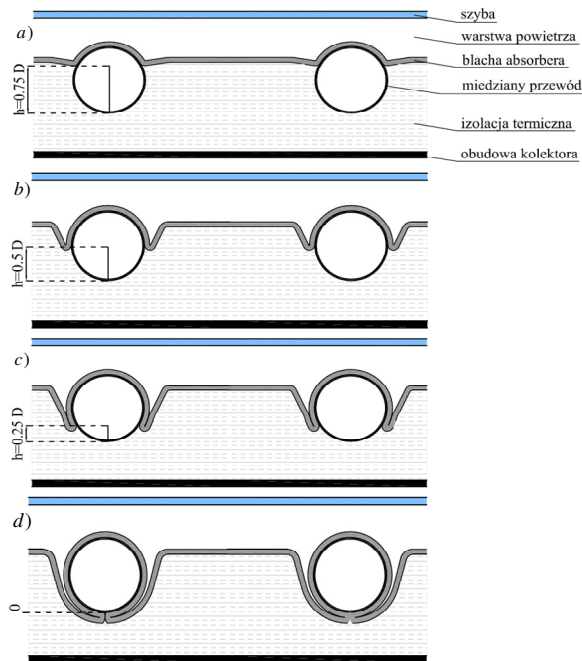
gdzie:  $x=h/D$ , natomiast  $a$ - $j$  są to współczynniki kształtu funkcji (16) przedstawione w tabeli 2.

Tab. 2. Współczynniki funkcji wymiernej (18)

Tab. 2. Rational coefficients appearing in eq. (18)

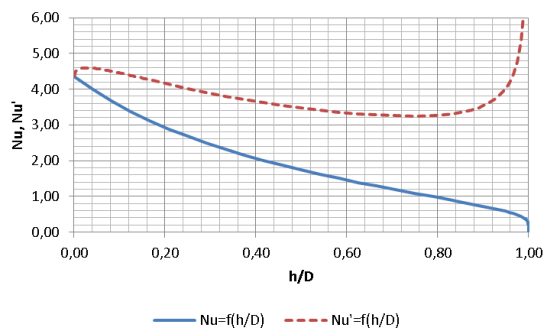
L.Nusselta	$a$	$b$	$c$	$d$	$e$
Nu	4,368135	100,939468	-84,003960	-141,859410	120,556941
Nu'	4,364232	357,307538	-802,709867	541,771220	-100,587500
L.Nusselta	$f$	$g$	$h$	$i$	$j$
Nu	26,034188	19,129437	18,684203	-172,632645	107,793746
Nu'	73,490710	-99,556060	-39,327400	83,425400	-19,024113

Modelowanie konwekcji wymuszonej w kolektorach słonecznych metodą elementów brzegowych



Rys. 3. Przekrój przez fragment kolektora słonecznego  
Fig. 3. Cross section of a cover part of flat-plate collector

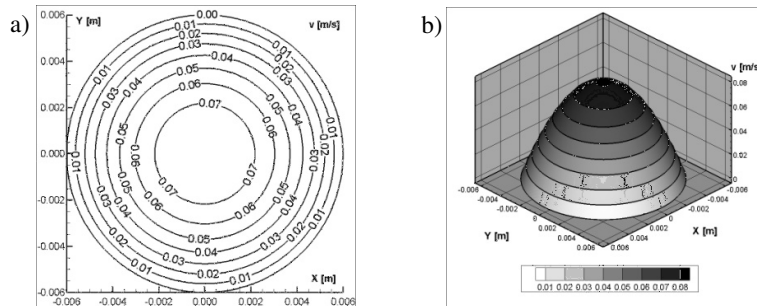
Na rysunku 4 wykreślono funkcję  $Nu=f(h/D)$  oraz  $Nu'=f(h/D)$ .



Rys. 4. Funkcja liczby Nusselta w funkcji zagłębienia przewodów kołowych kolektora  $Nu=f(h/D)$ ,  $Nu'=f(h/D)$

Fig. 4. Nusselt function  $Nu=f(h/D)$ ,  $Nu'=f(h/D)$  in solar collector with circular pipe

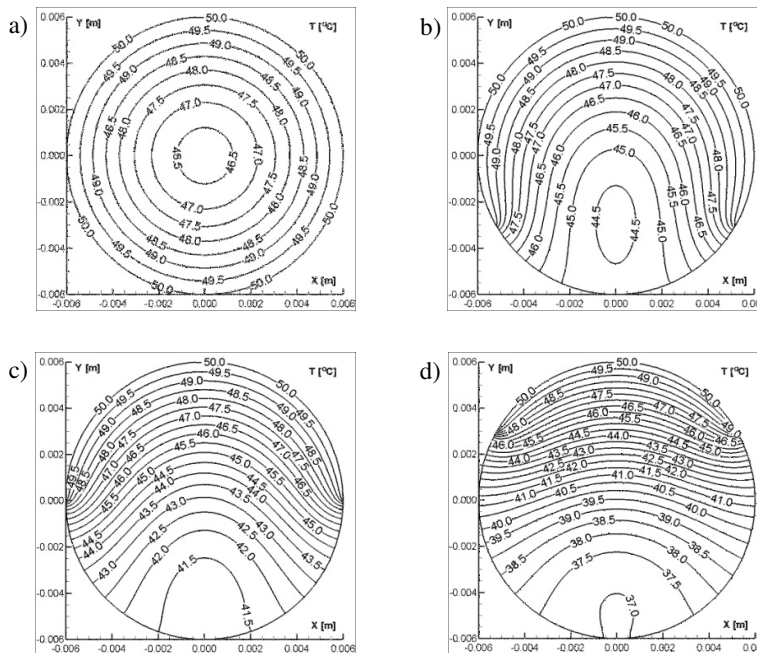
Na rysunku 5a wykreślono izotachy przepływu roztworu glikolu etylenowego w rurce kolektora słonecznego, natomiast na rysunku 5b widok 3D pola prędkości.



Rys. 5. Pole prędkości w przewodzie kolektora słonecznego ( $Re=200$ ):  
a) izotachy, b) widok 3D

Fig. 5. Velocity field of BEM results ( $Re=200$ ) in solar collector with circular pipe:  
a) 2D view, b) 3D view

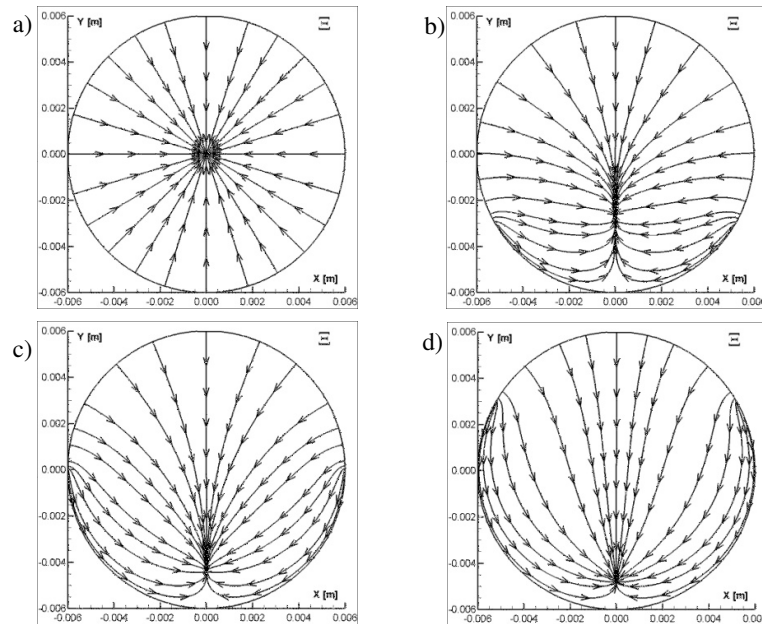
Na rysunkach 6a-d przedstawiono pola temperatur dla wybranych proporcji  $h/D$ : 0; 0,25; 0,50; 0,75, natomiast na rysunkach 7a-d wykreślono linie przepływu ciepła.



Rys. 6. Pole temperatury przepływu w przewodzie kolektora słonecznego o przekroju  
kołowym wyznaczony metodą MEB (roztwór glikolu etylenowego  $Re=200$ )  $h/D$ :  
0,0 (a); 0,25 (b); 0,50 (c); 0,75 (d)

Fig.6. Temperature field of flow in solar collector with circular pipe (ethylene glycol  
34%,  $Re=200$ ), BEM solutions for  $h/D$ : 0,0 (a); 0,25 (b); 0,50 (c); 0,75 (d)





Rys. 7. Linie przepływu ciepła w przewodzie kolektora słonecznego o przekroju kołowym wyznaczony metodą MEB (roztwór glikolu etylenowego,  $Re=200$ )  $h/D$ : 0,0 (a); 0,25 (b); 0,50 (c); 0,75 (d)

Fig.7. Heatline of flow in solar collector with circular pipe (ethylene glycol 34%,  $Re=200$ ), BEM solutions for  $h/D$ : 0,0 (a); 0,25 (b); 0,50 (c); 0,75 (d)

## 5 Podsumowanie

Prezentowana metoda elementów brzegowych pozwala w sposób efektywny i dokładny rozwiązywać zagadnienia ciepłno-przepływowe w układach rurowych kolektorów słonecznych. W pracy wyznaczono liczby kryterialne Nussleta w zależności od usytuowania rurki kolektora płaskiego w absorberze. Przedstawiono również przykładowe rezultaty obliczeń symulacji pól temperatur i linii przepływu ciepła. Wzór (16) może być zastosowany do analiz prowadzących do polepszenia efektywności działania płaskich kolektorów słonecznych z układami rurowymi przewodów o kołowym kształcie przekroju poprzecznego. Przedstawiony wyżej algorytm wyznaczania pól prędkości przepływu w układzie hydraulicznym kolektora słonecznego i pola temperatury oraz stosownych charakterystyk w postaci liczb kryterialnych ujmujących przepływowe i cieplne parametry układu hydraulicznego może być z powodzeniem zastosowany do analizy układów rurowych kolektorów o różnych kształtach przekroju poprzecznego przewodów. Zagadnienia przepływu oraz transferu masy i ciepła w układach hydraulicznych rurowych kolektorów słonecznych przy użyciu elementów brzegowych prowadzą do stosunkowo prostych algorytmów i ich implementacji obliczeniowych, co przy stosowaniu siatkowych metod obliczeniowych

wiąże się ze znacznymi trudnościami związanymi z generacją dostatecznie gęstych siatek obliczeniowych i kosztami obliczeń.

### Literatura

1. Incropera F.P., DeWitt D.P., Bergman T.L., Lavine A.S.: *Fundamentals of Heat and Mass Transfer* Edition 6th, Wiley, 2006
2. Landau L.D., Lifshitz E.M.: *Fluid Mechanics*. Pergamon Press, 1987
3. Rodríguez-Hidalgo M.C., Rodríguez-Aumente P.A., Lecuona A., Gutiérrez-Urueta G.L., Ventas R.: Flat plate thermal solar collector efficiency- Transient behavior under working conditions. Part I - Model description and experimental validation; *Applied Thermal Engineering* 31, 2011, pp. 2394-2404
4. Fan J., Shah L.J., Furbo S.: Flow distribution in a solar collector panel with horizontally inclined absorber strips, *Solar Energy* 81, 2007, pp. 1501-1511
5. Stefanović V.P., Pavlović S.R., Ilić M.N., Apostolović N.S., Kuštrimović D.D.: Numerical simulation of concentrating solar collector P2CC with a small concentrating ratio, *Thermal Science*, vol. 16, 2012, suppl. 2, pp. 471-482
6. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania płaskich przepływów cieczy lepkiej, *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 5, nr 1, pp. 94-105, 2011
7. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Wyznaczanie współczynnika Boussinesqa w przepływie laminarnym w prostoosiowych przewodach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów brzegowych, *Symulacja w Badaniach i Rozwoju*, vol. 3, no. 2, pp. 115-128, 2012
8. Demianiuk A., Sorko S.A.: Analysis of flow and thermal phenomena in evacuated tube collectors, *Acta Mechanica et Automatica*, vol. 6, nr 4, pp. 5-10, 2012
9. Demianiuk A., Sorko S.A.: Modelowanie procesów transportu masy i ciepła w płaskich kolektorach słonecznych, *Symulacja w Badaniach i Rozwoju*, vol. 5, nr 1, pp. 5-16, 2014
10. Teleszewski T.J.: Wyznaczanie gęstości strumienia ciepła konwekcji wymuszonej w przepływie laminarnym w przewodach prostoosiowych metodą elementów brzegowych, *Symulacja w Badaniach i Rozwoju*, vol. 5, no. 2, pp. 143-153, 2014
11. Morini G.L.: Analytical determination of the temperature distribution and Nusselt numbers in rectangular ducts with constant axial heat flux, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 43, no. 5, pp. 741-755, 2000
12. Schmidt F.W., Newell M.E.: Heat transfer in fully developed laminar flow through rectangular and isosceles triangular ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, vol. 10, issue 8, pp. 1121-1123, 1967

## Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm MEB symulacji konwekcji wymuszonej w przewodach kolektorów słonecznych. Weryfikacja metody elementów brzegowych została dokonana poprzez porównanie rezultatów obliczeń MEB ze znanym rozwiązaniem analitycznym. W opracowaniu przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń symulacji konwekcji wymuszonej w przewodzie kolektora płaskiego o kołowym obrysie przekroju poprzecznego przewodu. W Katedrze Ciepłownictwa Politechniki Białostockiej sporządzono blok programów obliczeniowych do wyznaczania przepływu i wymiany ciepła w zaawansowanych układach hydraulicznych. (język programowania Fortran, implementacja oprogramowania w systemie dostępu zdalnego do serwera obliczeniowego w Centrum Komputerowych Sieci Rozległych Politechniki Białostockiej)

**Słowa kluczowe:** metoda elementów brzegowych, konwekcja wymuszona, kolektory słoneczne

## **Simulations forced convection by the Boundary Element Method in solar thermal collector ducts**

### Summary

The paper presents the numerical application of Boundary Element Method for simulations of forced convection in a solar thermal collector duct. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests. A numerical examples presented in the article describe fully developed forced convection through circular duct of flat plate collectors. The computer programs were written in Fortran programming language.

**Keywords:** boundary element method, forced convection, solar thermal collector

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014 PB.

