

**Tomasz Janusz TELESZEWSKI,**  
**Sławomir Adam SORKO**

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok,  
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

## **Wyznaczanie współczynnika Boussinesq'a w przepływie laminarnym w prostoosiowych przewodach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego metodą elementów brzegowych**

### 1 Wstęp

W wielu zagadnieniach obliczeniowych hydrauliki związanych z wyznaczaniem przepływu w przewodach zamkniętych i kanałach otwartych podstawę stanowi uogólnione równanie Bernoulli'ego, w którym operuje się uśrednionymi prędkościami w przekrojach poprzecznych przewodów i kanałów. Prędkość przepływu cieczy lepkiej w przewodach zamkniętych i kanałach otwartych zmienia się od wartości równej zeru na ściankach do wartości maksymalnych w punktach przekroju poprzecznego najbardziej odległych od ścianek ograniczających strugę, przy czym profile prędkości cieczy w przekroju poprzecznym zależne są przede wszystkim od lepkości cieczy, kształtu przekroju poprzecznego przewodu lub kanału i charakteru przepływu (przepływ laminarny lub turbulentny). Zatem korzystanie z modelu jednowymiarowego przepływu cieczy lepkiej i nieściśliwej opartego na analizie uśrednionych wartości prędkości przepływu wymaga wprowadzenie współczynników korekcyjnych dotyczących pędu (współczynnik Boussinesq'a) i energii kinetycznej strugi (współczynnik Coriolisa) [1,2]:

$$\beta = \frac{M^{rz}}{M^{sr}} = \frac{1}{c_{sr}^2 A} \iint_A c^2 dA \quad (1a)$$

$$\alpha = \frac{E^{rz}}{E^{sr}} = \frac{1}{c_{sr}^3 A} \iint_A c^3 dA \quad (1b)$$

gdzie:  $c$  oznacza prędkość strugi elementarnej jednokierunkowego przepływu,  $c_{sr}$  prędkość średnią przepływu w przewodzie o powierzchni przekroju poprzecznego  $A$ , wyznaczoną z zależności:  $c_{sr} = Q/A$ , przy czym masowe natężenie przepływu  $Q$  przez przewód o powierzchni przekroju poprzecznego  $A$  jest równe:

$$Q = \iint_A c dA$$

Do wyznaczenia przedstawionych wyżej współczynników konieczne jest wyznaczenie pola prędkości jednokierunkowego przepływu cieczy lepkiej w przewodzie zamkniętym całkowicie wypełnionym cieczą, lub kanale otwartym, oraz pola powierzchni przewodu

lub kanału zawartego w obwodzie zwilżonym przez ciecz. Dla najczęściej stosowanego w systemach hydraulicznych kształtu przewodu tj. długiego prostoliniowego przewodu o kołowym kształcie przekroju poprzecznego współczynniki korekcyjne  $\alpha$  i  $\beta$  można wyznaczyć analitycznie zarówno dla warunków przepływu laminarnego jak też turbulentnego przy różnych profilach prędkości. Dla innych kształtów przekroju poprzecznego przewodów: kształtu eliptycznego, prostokątnego, trójkątnego są również znane analityczne rozwiązania pól prędkości w jednowymiarowych laminarnych przepływach cieczy lepkiej [3]. W zagadnieniach przepływu w układach rurowych solarnych kolektorów cieczowych, wymienników ciepła, przepływów w mikrokanalach coraz częściej rozpatruje się przepływy przez przewody o złożonych kształtach przekroju poprzecznego, różnych od wyżej wymienionych, w tym przepływy w przewodach z wypełnieniem (przewód w przewodzie). W przypadku układów przepływowych o złożonych kształtach przekroju poprzecznego przewodów wyznaczenie pola prędkości, objętościowego natężenia przepływu, a w dalszej kolejności współczynników korekcyjnych pędu i energii na użytek uproszczonych metod obliczeniowych analizy przepływu cieczy, wiąże się z pewnymi trudnościami.

W opracowaniu zaprezentowano zastosowanie metody brzegowych równań całkowych do wyznaczania laminarnego, jednokierunkowego przepływu cieczy lepkiej przez prostoosiowe przewody o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego. Wyznaczono wartości współczynnika Boussinesqa dla przepływu laminarnego przez przewody o przekroju prostokątnym. Na podstawie obliczeń pola prędkości przepływu dla różnych proporcji wymiarów poprzecznych przewodów o przekroju prostokątnym zaproponowano algebraiczną formułę do wyznaczania współczynnika Boussinesqa w przepływach laminarnych przez przewody o przekroju prostokątnym.

## 2 Wyznaczenie przepływu laminarnego w przewodzie prostoliniowym metodą elementów brzegowych

### 2.1. Sformułowanie zagadnienia

Jednokierunkowy ustalony, laminarny przepływ cieczy lepkiej w prostoosiowym przewodzie (Rys. 1.), o przekroju poprzecznym ( $\Lambda$ ) objętym brzegiem ( $L$ ) tj. konturem przewodu, można opisać równaniem Stokesa:

$$\left( \frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) = -\Delta P, \text{ gdzie: } \frac{1}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = -\Delta P \quad (2)$$

z warunkiem brzegowym zakładającym wartość prędkości na brzegu materialnym sztywnym i nieprzepuszczalnym (na ścianie przewodu) równą zeru [4]:

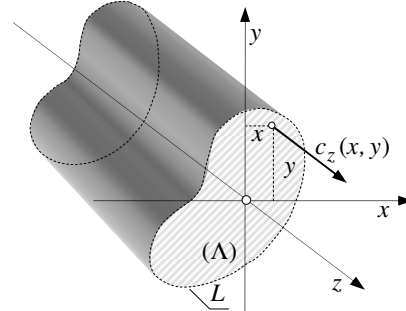
$$c_z(x, y) = 0 \quad ; \quad \forall (x, y) \in L \quad (2a)$$

*Wyznaczanie współczynnika Boussinesqa w przepływie laminarnym  
w prostoosiowych przewodach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego  
metodą elementów brzegowych*

---

Rys. 1. Przepływ jednokierunkowy przez prostoosiowy przewód o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego

Fig. 1. Unidirectional flow through straight-line pipe of arbitrary cross-section



Jedną z metod rozwiązania sformułowanego wyżej zagadnienia brzegowego dla równania Poissona (2) jest dekompozycja funkcji  $c_z(x, y)$  na część jednorodną  $\bar{c}_z(x, y)$  spełniającą równanie Laplace'a i część niejednorodną  $\tilde{c}_z(x, y)$  spełniającą równanie Poissona [5]:

$$c_z(x, y) = \bar{c}_z(x, y) + \tilde{c}_z(x, y) , \quad (3)$$

gdzie:

$$\nabla^2 \bar{c}_z(x, y) = 0 , \quad \forall (x, y) \in \Lambda \cup L , \quad (3a)$$

$$\nabla^2 \tilde{c}_z(x, y) = -\Delta P , \quad \forall (x, y) \in \Lambda \cup L , \quad (3b)$$

przy czym część niejednorodną można przedstawić w postaci:

$$\tilde{c}_z(x, y) = -\Delta P v(x, y) , \quad (4)$$

gdzie funkcja  $v_z(x, y)$  spełnia równanie Poissona:

$$\nabla^2 v(x, y) = 1 , \quad \forall (x, y) \in \Lambda \cup L \quad (4a)$$

i jedną z możliwych form jej realizacji jest postać:

$$v(x, y) = \frac{1}{4} \left[ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 \right] , \quad \forall ((x, y), (x_0, y_0)) \in \Lambda \cup L \quad (4b)$$

przy czym  $(x_0, y_0)$  są współrzędnymi dowolnego punktu odniesienia, będącego punktem początku układu współrzędnych  $\{x, y\}$  związanego z rozważanym przekrojem poprzecznym [5], [6].

Wobec dekompozycji (3) funkcji  $c_z(x, y)$  warunek brzegowy  $c_z(x, y) = 0$  przyjmuje postać:

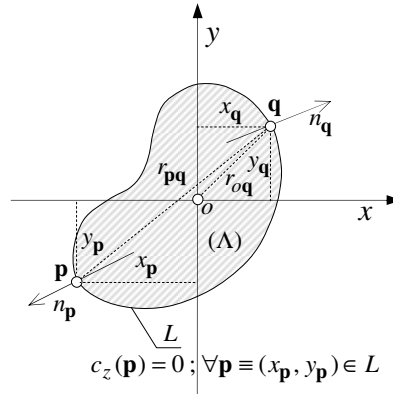
$$\bar{c}_z(x, y) = -\tilde{c}_z(x, y) = \Delta P v(x, y) , \quad \forall (x, y) \in L . \quad (5)$$

2.2. Całkowe równanie opisujące laminarny przepływ jednokierunkowy  
 Wykorzystując drugą tożsamość Greena składową homogeniczną prędkości przepływu  $\bar{c}_z(\mathbf{p})$  spełniającą równanie Laplace'a w obszarze  $(\Lambda)$  ograniczonym linią brzegową  $(L)$  (Rys. 2) można opisać równaniem [7].

Rys. 2. Szkic do matematycznego opisu przepływu jednokierunkowego metodą elementów brzegowych  
 Obszar przepływu  $(\Lambda)$  ograniczony brzegiem  $(L)$   
 Punkty brzegowe. Warunek brzegowy.

Fig. 2. Sketch to the mathematical description of unidirectional flow by the boundary element method.

Cross-section of the domain  $(\Lambda)$   
 bounded by boundary-line  $(L)$   
 Source and field points on the boundary line.  
 Boundary condition.



$$c_z(\mathbf{p}) = 0; \forall \mathbf{p} \equiv (x_p, y_p) \in L$$

$$\bar{c}_z(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} \frac{\partial \bar{c}_z(\mathbf{q})}{\partial n_q} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} \bar{c}_z(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q, \quad (6)$$

$(\mathbf{p}) \in \Lambda; (\mathbf{q}) \in L$

przy czym  $\mathbf{p}(x_p, y_p)$  i  $\mathbf{q}(x_q, y_q)$  są odpowiednio punktem ustalonym i punktem bieżącym całkowania, funkcja  $K(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  jest rozwiązaniem podstawowym równania Laplace'a:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r_{pq}} \right); \quad r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|; \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (6a)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_q} = \frac{1}{2\pi} \frac{r_{pq}^x n_q^x + r_{pq}^y n_q^y}{r_{pq}^2}; \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (6b)$$

gdzie:  $n_q = \left[ n_q^x, n_q^y \right] = \left[ \frac{\delta y_q}{\delta L_q}, \frac{\delta x_q}{\delta L_q} \right],$

jest wektorem normalnym do brzegu  $(L)$  w punkcie  $\mathbf{q}(x_q, y_q)$ .

Po wstawieniu zależności (5) do równania całkowego (6) i wydzieleniu wartości głównej w drugiej całce po prawej stronie ze względu na osobliwość jądra całkowego  $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$  na brzegu  $(L)$  obszaru  $(\Lambda)$  (kiedy  $\mathbf{q}(x_q, y_q) \equiv \mathbf{p}(x_p, y_p)$ ), przy założeniu, że brzeg obszaru jest brzegiem gładkim, otrzymuje się brzegowe równanie całkowe:

$$\int_{(L)} g(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q = \Delta P \left[ -\frac{1}{2} v(\mathbf{p}) + \int_{(L)} v(\mathbf{q}) E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q \right]. \quad (7)$$

$(\mathbf{p}), (\mathbf{q}) \in L$

gdzie:  $g(\mathbf{q}) = \frac{\partial \bar{c}_z(\mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}}$  ,  $v(\mathbf{q}) = \frac{r_{o\mathbf{q}}^2}{4}$  (7a,b)

Po rozwiązaniu równania całkowego (7) wartości funkcji  $\bar{c}_z(\mathbf{s})$  w punktach  $\mathbf{s}(x_s, y_s)$  wewnątrz obszaru  $(\Lambda)$  wyznacza się ze związku całkowego:

$$\bar{c}_z(\mathbf{s}) = - \int_{(L)} g(\mathbf{q})K(\mathbf{s}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} + \Delta P \int_{(L)} v(\mathbf{q})E(\mathbf{s}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} . \quad (8)$$

$(\mathbf{s}) \in \Lambda ; (\mathbf{q}) \in L$

Objęściowe natężenie  $(Q)$  przepływu jednokierunkowego przez przewód o przekroju poprzecznym  $(\Lambda)$  całkowicie wypełniony cieczą jest równe:

$$Q = \iint_{(\Lambda)} c_z(\mathbf{q}) d\Lambda_{\mathbf{q}} . \quad (9)$$

### 2.3. Numeryczne rozwiązanie całkowego równania

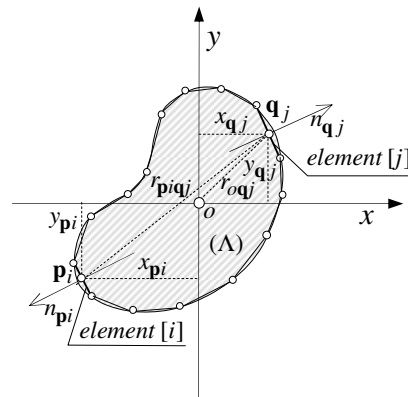
opisującego laminarny przepływ jednokierunkowy

W ramach metody elementów brzegowych brzegowe równania całkowe rozwiązuje się numerycznie ze względu na dowolność kształtu brzegu  $(L)$ , w wielu przypadkach o złożonej geometrii, zastępując linię brzegową układem prostoliniowych lub krzywoliniowych elementów brzegowych o stałej lub zmiennej gęstości rozpatrywanych funkcji na tych elementach [7],[8].

Najprostszym sposobem dyskretyzacji równania całkowego (7) jest przybliżenie linii brzegowej  $(L)$  J-elementowym układem elementów liniowych z centralnymi punktami kolokacji  $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$  o stałej gęstości funkcji  $g(\mathbf{q})$  na każdym elemencie (Rys. 3).

Rys. 3. Szkic do matematycznego opisu przepływu jednokierunkowego metodą elementów brzegowych  
Dyskretyzacja linii brzegowej  $(L)$

Fig. 3. Sketch to the mathematical description of unidirectional flow by the boundary element method.  
Discretization of boundary-line  $(L)$



W przypadku aproksymacji brzegu  $(L)$  rozpatrywanego obszaru płaskiego  $(\Lambda)$  brzegowymi elementami liniowymi o stałej gęstości rozkładu funkcji  $g(\mathbf{q}_j)$  na każdym

elemencie ( $L_j$ ) równanie całkowe (7) sprowadza się do układu (J) algebraicznych równań liniowych względem niewiadomej funkcji  $g(\mathbf{q}_j)$ :

$$\sum_{j=1}^J g(\mathbf{q}_j) \int_{L_j} K(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_j = \Delta P \left[ -\frac{1}{2} v(\mathbf{q}_i) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J v(\mathbf{q}_j) \int_{L_j} E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) dL_j \right] \quad (10)$$

gdzie:

$$K(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{r_{ij}} \right), \quad r_{ij} = \left[ (x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (10a)$$

$$E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_i - x_j) n_j^y - (y_i - y_j) n_j^x}{r_{ij}^2}, \quad (10b)$$

oraz:

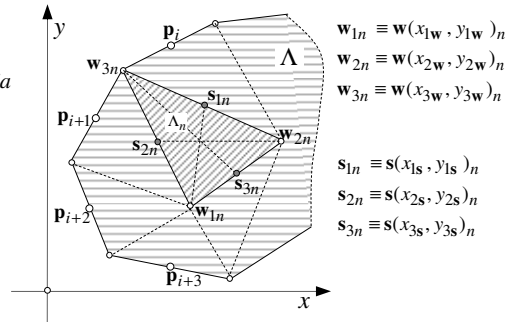
$$v(\mathbf{q}_j) = \frac{r_j^2}{4} = \frac{1}{4} \left[ (x_j - x_o)^2 + (y_j - y_o)^2 \right]. \quad (10c)$$

### 3 Numeryczne wyznaczenie współczynników Bussinesq'a i Coriolisa w laminarnym przepływie jednokierunkowym przez prostoosiowy przewód o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego

Triangularyzując obszar ( $\Lambda$ ) z pożądaną gęstością  $N$  elementami trójkątnymi (Rys. 4)

Rys. 4. Szkic do opisu numerycznego całkowania w podobszarach trójkątnych z trzema punktami Gaussa

Fig. 4. Sketch description of numerical two-dimensional numerical integration over triangular domains with three Gauss points



o współrzędnych wierzchołków:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w}_{1n} &\equiv \mathbf{w}(x_{1\mathbf{w}}, y_{1\mathbf{w}})_n \\ \mathbf{w}_{2n} &\equiv \mathbf{w}(x_{2\mathbf{w}}, y_{2\mathbf{w}})_n \\ \mathbf{w}_{3n} &\equiv \mathbf{w}(x_{3\mathbf{w}}, y_{3\mathbf{w}})_n \end{aligned} \right\} n=1, \dots, N$$

i współrzędnych punktów kolokacji:

*Wyznaczanie współczynnika Boussinesqa w przepływie laminarnym  
w prostoosiowych przewodach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego  
metodą elementów brzegowych*

$$\left. \begin{aligned} x_{1sn} &= 0.5(x_{3w} + x_{2w})_n \\ y_{1sn} &= 0.5(y_{3w} + y_{2w})_n \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x_{2sn} &= 0.5(x_{3w} + x_{1w})_n \\ y_{2sn} &= 0.5(y_{3w} + y_{1w})_n \end{aligned} \right\}; \quad \left. \begin{aligned} x_{3sn} &= 0.5(x_{1w} + x_{2w})_n \\ y_{3sn} &= 0.5(y_{1w} + y_{2w})_n \end{aligned} \right\}$$

oraz polach powierzchni:

$$\Lambda_n = [x_{1w}(y_{2w} - y_{3w}) + x_{2w}(y_{3w} - y_{1w}) + x_{3w}(y_{1w} - y_{2w})]_{n=1, \dots, N}$$

po wyznaczeniu gęstości rozkładu funkcji  $g(\mathbf{q}_j)$  w punktach  $\mathbf{q}_j$ ;  $j = 1, \dots, J$  na brzegu ( $L$ ) obszaru wartości funkcji  $\bar{c}_z(\mathbf{s}_{kn})$  w punktach  $\mathbf{s}_{kn}$ ;  $k = 1, 2, 3$ ;  $n = 1, \dots, N$  wewnątrz obszaru ( $\Lambda$ ) wyznacza się ze związku:

$$\bar{c}_z(\mathbf{s}_{kn}) = \left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^J g(\mathbf{q}_j) \int_{L_j} K(\mathbf{s}_{kn}, \mathbf{q}_j) dL_j &+ \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J v(\mathbf{q}_j) \int_{L_j} E(\mathbf{s}_{kn}, \mathbf{q}_j) dL_j \end{aligned} \right\}_{\substack{k=1,2,3 \\ n=1, \dots, N}} \quad (11)$$

a następnie wartości prędkości  $c_z(\mathbf{s}_{kn})$  w punktach i funkcje:

$$f^B(\mathbf{s}_{kn}) = (c_z(\mathbf{s}_{kn}))^2, \quad k = 1, 2, 3; \quad n = 1, \dots, N \quad (12a)$$

$$f^C(\mathbf{s}_{kn}) = (c_z(\mathbf{s}_{kn}))^3, \quad k = 1, 2, 3; \quad n = 1, \dots, N \quad (12b)$$

Współrzędne punktów wewnętrznych  $\mathbf{p}_n \equiv \mathbf{p}(x_p, y_p)_n$ ;  $\mathbf{p}_n \forall \Lambda_n$  i punktów brzegowych  $\mathbf{s}_n \equiv \mathbf{s}(x_s, y_s)_n$ ;  $\mathbf{s}_n \forall L_n$  trójkąta ( $\Lambda_n$ ) można opisać we współrzędnych lokalnych  $(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  związkami:

$$\left. \begin{aligned} x_{\mathbf{p}n} &= \sum_{k=1}^3 (\xi_k x_{kw})_n; \quad y_{\mathbf{p}n} = \sum_{k=1}^3 (\xi_k y_{kw})_n \end{aligned} \right\}_{\substack{(0 < \xi_k < 1) \\ n=1, \dots, N}} \quad k=1, 2, 3$$

zatem:

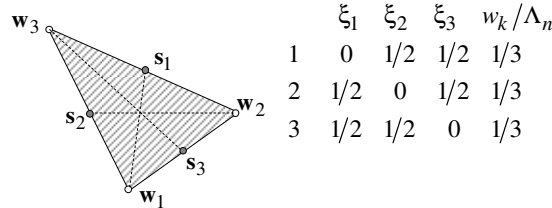
$$Q = \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 c_z(\mathbf{s}_{kn}) w_k \Lambda_n \quad \text{oraz} \quad c_{sr} = \frac{Q}{A} \quad \text{gdzie:} \quad A = \sum_{n=1}^N \Lambda_n \quad (13a, b, c)$$

dla funkcji  $f^B(\mathbf{s}_{kn})$  i  $f^C(\mathbf{s}_{kn})$  zadanych dyskretnie w punktach  $\mathbf{s}_n \equiv \mathbf{s}(x_s, y_s)_n$  podobszarów ( $\Lambda_n$ ) otrzymuje się ostatecznie:

$$\beta = \frac{1}{c_{sr}^2 A} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 f^B(\mathbf{s}_{kn}) w_k \Lambda_n \quad (14a)$$

$$\alpha = \frac{1}{c_{sr}^3 A} \sum_{n=1}^N \sum_{k=1}^3 f^C(\mathbf{s}_{kn}) w_k \Lambda_n \quad (14b)$$

przy czym w przypadku trójpunktowego schematu punktów Gaussa ich współrzędne i funkcje wagi są odpowiednio równe:



4 Weryfikacja metody obliczeniowej  
 Wyznaczenie współczynnika Boussinesqa w laminarnym przepływie przez prostoosiowy przewód o przekroju prostokątnym

Weryfikacji rezultatów obliczeń dokonano przez porównanie profilu prędkości wyznaczonego numerycznie przy użyciu metody elementów brzegowych z analitycznym rozwiązaniem przepływu laminarnego w prostoosiowym przewodzie o przekroju prostokątnym o wymiarach  $2a$  i  $2b$  odpowiednio wzdłuż osi  $x$  i  $y$ . Prędkość jednokierunkowego, laminarnego przepływu przez przewód o przekroju prostokątnym jest opisana zależnością [10], [11]:

$$c_z(x, y) = \frac{\Delta P}{2} \left[ b^2 - y^2 + \frac{4}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^3} \frac{\cosh(mx)}{\cosh(ma)} \cos(my) \right] \quad (15)$$

gdzie:  $m = \left(\frac{\pi}{b}\right) \left(n - \frac{1}{2}\right)$

Natężenie przepływu przez przewód otrzymuje się całkując profil prędkości opisany równaniem (15):

$$Q = \int_{-a}^a \int_{-b}^b c_z(x, y) dy dx = \frac{\Delta P}{3} 4ab^3 \left[ 1 - \frac{6b^6}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{m^5} \tanh(ma) \right] \quad (16)$$

Obliczenia pola prędkości wykonano dla przypadku przepływu laminarnego przez prostoosiowy przewód o przekroju prostokątnym o wymiarach  $A=2a=10$  mm,  $B=2b=5$  mm przy liczbie Reynoldsa  $Re=50$  ( $Re = c_{sr}/D_h$  gdzie  $D_h = 2AB/(A + B)$ ).

Do wyznaczenia pola prędkości metodą brzegowych równań całkowych przyjęto dyskretyzację brzegu obszaru 400 elementami brzegowymi o stałej gęstości funkcji (100 elementów na boku prostokąta). Całkowanie numeryczne zdyskretyzowanych jąder całkowych w równaniu (10) opisanych związkami (10a) i (10b) zrealizowano przy użyciu kwadratur Gaussa-Legendre'a ze zmienną liczbą punktów całkowania ( $n_G$ ) w celu optymalizacji algorytmu obliczeniowego określoną według zależności [12]:



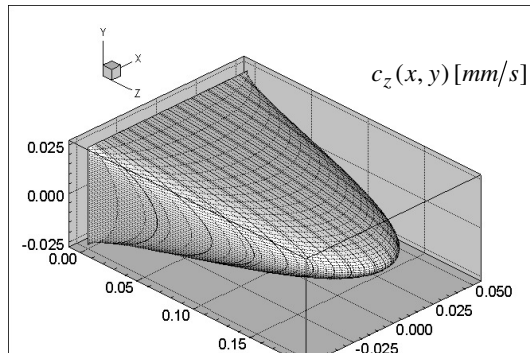
*Wyznaczanie współczynnika Boussinesqa w przepływie laminarnym  
w prostoosiowych przewodach o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego  
metodą elementów brzegowych*

$$\begin{aligned}
 r_{ij} > 5.5L_j & \quad n_G = 2 \\
 5.5L_j \geq r_{ij} > 1.5L_j & \quad n_G = 4 \\
 1.5L_j \geq r_{ij} & \quad n_G = 4
 \end{aligned}$$

Wykresy pola prędkości przepływu w przewodzie o przekroju prostokątnym  $A/B=2$  w przepływie określonym liczbą Reynoldsa  $Re=50$  wyznaczone przy użyciu metody elementów brzegowych przedstawiono na rysunkach (5a,b,c)

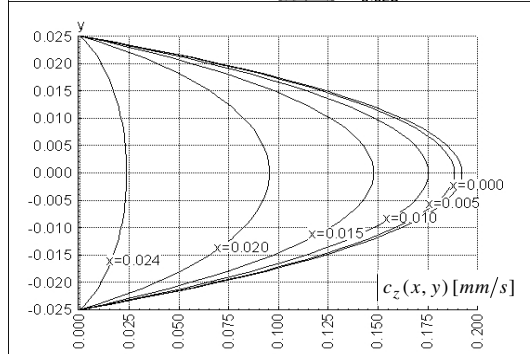
Rys. 5a. Rozkład prędkości przepływu w przewodzie prostoosiowym o przekroju prostokątnym  $A/B=2$ ,  $Re=50$   
Profil prędkości

Fig. 5a. Velocity field flow through straight-line pipe of rectangular cross-section  $A/B=2$ ,  $Re=50$   
Profile of the velocity



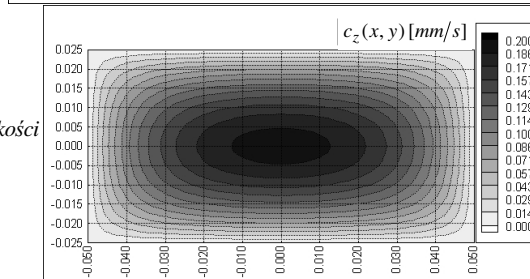
Rys. 5b. Rozkład prędkości przepływu w przewodzie prostoosiowym o przekroju prostokątnym  $A/B=2$ ,  $Re=50$   
Wykres prędkości  $x=const$

Fig. 5b. Velocity field flow through straight-line pipe of rectangular cross-section  $A/B=2$ ,  $Re=50$   
Profile of the velocity  $x=const$



Rys. 5c. Rozkład prędkości przepływu w przewodzie prostoosiowym o przekroju prostokątnym  $A/B=2$ ,  $Re=50$ .  
Wykres warstwiczny pola prędkości

Fig. 5c. Velocity field flow through straight-line pipe of rectangular cross-section  $A/B=2$ ,  $Re=50$ .  
Contour graph of the velocity



W tabeli 1 przedstawiono wyniki obliczeń profilu prędkości w centralnym przekroju przewodu ( $x=0, -b \leq y \leq +b$ ) zestawiając wartości obliczeń wykonanych metodą elementów brzegowych równa z wynikami obliczeń przy użyciu zależności (15)

z dokładnością  $\delta=1.0E-09$ . Błąd wyrażono wedle formuły:  $\delta c_z = \left| \frac{c_z^T - c_z^N}{c_z^T} \right| * 100\%$  gdzie  $c_z^T, c_z^N$  oznacza odpowiednio: prędkość wyznaczoną z formuły (15) (dokładną) i prędkość wyznaczoną przy użyciu metody elementów brzegowych.

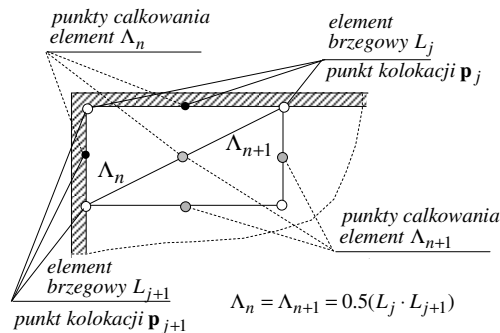
Tab. 1. Profil prędkości - błąd rozwiązania metodą elementów brzegowych

Tab. 1. Velocity profile – error analysis applied in BEM

Lp	Wsp. (X=0)	Rozwiązanie analityczne	Rozwiązanie MEB	Błąd metody
	y	$c_z^T(x, y)$	$c_z^N(x, y)$	$\delta c_z(0, y)$
-	cm	mm/s	mm/s	%
1	-2,5E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	-
2	-2,0E+00	6,97858E+00	6,97880E+00	3,1410E-03
3	-1,5E+00	1,23347E+01	1,23349E+01	1,7431E-03
4	-1,0E+00	1,61192E+01	1,61194E+01	1,3090E-03
5	-5,0E-01	1,83726E+01	1,83728E+01	1,1430E-03
6	0,0E+00	1,91208E+01	1,91210E+01	1,0931E-03
7	5,0E-01	1,83726E+01	1,83728E+01	1,1430E-03
8	1,0E+00	1,61192E+01	1,61194E+01	1,3090E-03
9	1,5E+00	1,23347E+01	1,23349E+01	1,7431E-03
10	2,0E+00	6,97858E+00	6,97880E+00	3,1410E-03
11	2,5E+00	0,00000E+00	0,00000E+00	-

Maksymalny błąd obliczeń pola prędkości przepływu metodą elementów brzegowych przy przyjętym podziale brzegu rozpatrywanego i przyjętej metodzie numerycznego całkowania nie przekracza wartości  $\delta c_z=0,004\%$ .

Po wyznaczeniu pola prędkości w kanale prostokątnym objętościowe natężenie przepływu  $Q$ , i współczynnik Boussinesq wyznaczono odpowiednio z zależności (9) i (14a) metodą numerycznego całkowania. W przypadku obszarów o regularnych kształtach istnieje możliwość optymalizacji algorytmów obliczeniowych i unifikacji elementów powierzchniowych przybliżających pole rozpatrywanego obszaru. W rozważanym przypadku elementy powierzchniowe wygenerowano jako układ  $N=21J=10000$  trójkątów prostokątnych (Rys.6) o długościach przyprostokątnych równych długości elementów liniowych. Przyjęty podział obszaru ( $\Lambda$ ) istotnie upraszcza generowanie współrzędnych punktów Gaussa do numerycznego całkowania przy zastosowaniu trójpunktowego schematu całkowania.



Rys.6. Trójkątne elementy powierzchniowe numerycznego całkowania.

Fig. 6. Triangular domain elements

4 Wyznaczenie współczynnika Boussinesqa przepływu  
w przewodach o przekroju prostokątnym w funkcji proporcji  
wymiarów przekroju

Obliczenia współczynnika Boussinesqa wykonano dla szeregu wariantów przekroju prostokątnego o różnej proporcji wymiarów B/A przewodu. Na podstawie obliczeń proponuje się prostą formułę algebraiczną do wyznaczania współczynnika Boussinesqa w przepływach laminarnych przez prostoosiowe przewody o przekroju prostokątnym:

$$\beta_F = f\left(\frac{B}{A}\right) = -0.228\left(\frac{B}{A}\right)^2 + 0.404\left(\frac{B}{A}\right) + 1.202 \text{ dla } ; 0 < \frac{B}{A} \leq 1 \quad (17)$$

Wartości współczynnika Boussinesqa dla różnych proporcji wymiarów poprzecznych przewodu otrzymane z zależności (17) porównano z wartościami prezentowanymi w literaturze przedmiotu [13] Wyniki obliczeń zestawiono w tabeli 2 i przedstawiono na wykresie (Rys. 7).

*Tab. 2. Współczynniki Boussinesqa. Laminarny przepływ przez prostoosiowy przewód o przekroju prostokątnym przy zmiennej proporcji wymiarów B/A*

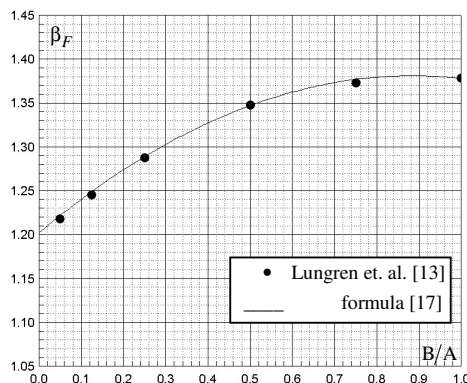
*Tab. 2. Boussinesq coefficients. Laminar flow through straight pipe of rectangle cross-section shape with variable proportion of the dimensions B/A*

LP	Stosunek długości boków B/A	Współczynnik Boussinesqa $\beta_L$ (r. lit.[13])	Współczynnik Boussinesqa $\beta_F$ (wzór (17))	Błąd funkcji $\delta\beta=f(B/A)$
-	-	-	-	-
1	1.00	1,37850E+00	1,37800E+00	3,62713E-02
2	0.875	-	1,38094E+00	-
3	0.75	1,37270E+00	1,37675E+00	2,95039E-01
4	0.625	-	1,36544E+00	-
5	0.500	1,34740E+00	1,34700E+00	2,96868E-02
6	0.375	-	1,32144E+00	-
7	0.250	1,28760E+00	1,28875E+00	8,93135E-02
8	0.125	1,24540E+00	1,24894E+00	2,84045E-01
9	0.005	1,37850E+00	1,37800E+00	3,62713E-02

Błąd względny wyrażono jako:  $\delta\beta = |(\beta_L - \beta_F) / \beta_L| * 100\%$  gdzie  $\beta_L, \beta_F$  oznaczają: wartości współczynnika Boussinesqa prezentowane w źródle [13] i wartości opisane formułą (17).

Rys. 7. Wartości współczynnika Boussinesqa w laminarnym przepływie przez przewód o przekroju prostokątnym  $A/B=var$ .

Fig. 7. Boussinesq coefficient for laminar flow through pipe of rectangular cross-section shape  $A/B=var$



## 5 Podsumowanie

W opracowaniu przedstawiono algorytm wyznaczania współczynnika Boussinesqa (korekcji pędu) dla przepływów laminarnych przy użyciu metody brzegowych równań całkowych. Prezentowaną metodą można wyznaczać współczynnik Coriolisa (korekcji energii kinetycznej), drugi istotny współczynnik w matematycznym opisie przepływu cieczy przez przewody. W przypadku dowolnego kształtu przekroju poprzecznego przewodów (np. przewodów elastycznych i mikrokanałów) metoda brzegowych równań całkowych jest optymalną i efektywną metodą rozwiązywania zagadnień wyznaczania przepływu i istotnych parametrów jego matematycznego opisu. Rezultatem obliczeń jest proponowany przez autorów wzór (17) opisujący wartości współczynnika Boussinesqa dla laminarnych przepływów przez prostoosiowe przewody o prostokątnym kształcie przekroju poprzecznego w zakresie proporcji wymiarów poprzecznych przewodów  $0 < B/A \leq 1.0$ . Możliwe wydaje się uzyskanie analogicznych relacji dla przewodów o przekroju trójkątnym, wielokątnym i przewodów z wypełnieniem w funkcji ich wymiarów charakterystycznych i kryterialnych liczb podobieństwa.

## Literatura

1. Chadwick A.: Morfett J., Borthwick M.: *Hydraulics in Civil and Environmental Engineering*, 5th Edition. Spon Press 2012
2. Benedict R.P.: *Fundamentals of pipe flow*. Elsevier Science, John Wiley&Sons 1980
3. Pozrikidis C.: *Fluid Dynamics: Theory, Computation, and Numerical Simulation*, Kluwer Academic Press 2001
4. Batchelor G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 2000
5. Pozrikidis C.: *A Practical Guide to Boundary Element Method with the software Library Bemlib*, Chapman & Hall/ CRC, New York 2002
6. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych

- o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, *Acta Mechanica et Automatica*, s. 124-132, Vol.5, nr 3, 2011
7. Katsikadelis J. T.: *Boundary Elements. Theory and Applications*, Elsevier, 2002.
  8. Kythe P. K.: *An Introduction to Boundary Element Method*, CRC Press, 1995
  9. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag. NY 1984
  10. White F.M.: *Viscous fluid flow* – 2ed., McGraw-Hill, Inc., 1991
  11. Spurk J. H.: T1. *Fluid Mechanics*, T2 *Fluid Mechanics Problems and Solutions*, Springer, 1997
  12. Wrobel L.C.: *The Boundary Element Method. Vol I. Applications in Thermo-fluids and Accoustics*, John Willey & Sons Ltd. 2002
  13. Lundgren, T.S.; Sparrow, E.M. and Starr, J.B., Pressure Drop Due to the Entrance Region in Ducts of Arbitrary Cross Section, *Journal of Basic Engineering - Transactions of the Asme*, vol. 86, pp. 620-626, 1964

### Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono algorytm wyznaczania pola prędkości i współczynnika Boussinesq'a (korekcji pędu) dla przepływów laminarnych przez przewody o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego przy użyciu metody brzegowych równań całkowych. Przedstawiono rezultaty wyników obliczeń pola prędkości i współczynnika Boussinesq'a dla przypadku prostokątnego kształtu przekroju poprzecznego przewodu. Dokonano porównania rozwiązania numerycznego z rozwiązaniem analitycznym. Zaproponowano uogólnioną formułę obliczeniową do wyznaczania współczynnika Boussinesq'a w laminarnym przepływie cieczy pod ciśnieniem przez prostoosiowe przewody o prostokątnym przekroju poprzecznym w funkcji proporcji wymiarów przewodu.

**Słowa kluczowe:** współczynnik Boussinesq'a, metoda elementów brzegowych, przepływy laminarne, przewody prostoosiowe

## **Solution of Boussinesq coefficient of the laminar flows through pipes of arbitrary cross-section shapes by boundary element method**

### Summary

In the elaboration the algorithm of the velocity field and Boussinesq coefficient for laminar flows through straight pipes of arbitrary cross-section shapes by means of boundary element method were presented. The results of numerical calculations of the velocity field and the Boussinesq coefficient for the unidirectional flow through pipes of rectangular shape of the cross-section were compared with analytical solutions. One proposed the generalized computational formula to calculations of the Boussinesq

coefficient in the laminar flow through straight pipes of the rectangular cross-section as the function of the proportion of cross-section dimensions.

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy własnej nr W/WBiŚ/8/2011.