

Tomasz Janusz TELESZEWSKI,
Piotr RYNKOWSKI

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok,
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, piotr.rynkowski@gmail.com

Zastosowanie metody elementów brzegowych do analizy ruchu filtracyjnego

1 Wstęp

Przepływy w ośrodkach porowatych mają zazwyczaj charakter laminarny. Płaski ruch wód gruntowych dla jednakowego współczynnika filtracji k w całym obszarze jest przepływem potencjalnym opisanym równaniem Laplace'a [1,2]:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

gdzie h jest to wysokość rozporządzalnego naporu strugi cieczy w dowolnym punkcie.

Składowe wektora prędkości c_x oraz c_y są pochodnymi potencjału prędkości ruchu filtracyjnego $\phi = -kh$ [1,2]:

$$c_x = -k \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (2)$$

$$c_y = -k \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (3)$$

Po uwzględnieniu zależności (2) i (3) w równaniu (1) ruch filtracyjny można przedstawić w funkcji potencjału prędkości:

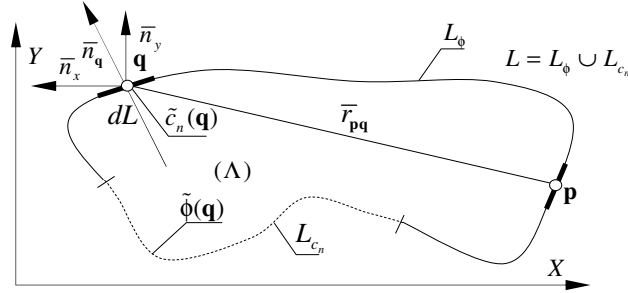
$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \quad (4)$$

Równanie (4) najczęściej rozwiązywane jest metodami siatkowymi takimi jak: metoda różnic skończonych [3,4,5], metoda elementów skończonych [6,7] czy metoda objętości skończonych [8]. Stosowanie tych metod wiąże się z budową pracochłonnych siatek. W pracy przedstawiono alternatywne rozwiązanie równania (4) metodą elementów brzegowych, która nie wymaga budowy siatki.

2 Brzegowe równanie całkowe opisujące ruch filtracyjny w zagadnieniach dwuwymiarowych

Zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego (4) formułuje się w postaci złożonego warunku brzegowego Dirichleta i Neumanna zakładającego znane wartości potencjału prędkości ruchu filtracyjnego $\tilde{\phi}(\mathbf{q}) = -kh$ na części brzegu L_ϕ ($\mathbf{q} \in L_\phi$)

i znane wartości pochodnej normalnej potencjału prędkości $\tilde{c}_n(\mathbf{q}) = \frac{\partial \tilde{\phi}(\mathbf{q})}{\partial n}$ na części brzegu L_{c_n} ($\mathbf{q} \in L_{c_n}$) (rys. 1).



Rys. 1. Szkic do analizy zagadnienia brzegowego w obszarze płaskim
Fig. 1. Sketch to consideration of boundary conditions

Rozwiązaniem równania Laplace'a (1) jest równanie całkowe [9]:

$$\begin{aligned} -\chi(\mathbf{p})\phi(\mathbf{p}) + \int_{(L_{c_n})} c_n(\mathbf{q})K(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{c_n} - \int_{(L_\phi)} \phi(\mathbf{q})E(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_\phi = \\ = - \int_{(L_\phi)} \tilde{c}_n(\mathbf{q})K(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_\phi + \int_{(L_{c_n})} \tilde{\phi}(\mathbf{q})E(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{c_n}, \end{aligned} \quad (5)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L$

gdzie dla brzegu gładkiego $\chi(\mathbf{p})=1/2$ oraz:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right); \quad r_{pq} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}, \quad (5a)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = -\frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_x + (y_p - y_q)n_y}{r_{pq}^2}; \quad [n_x, n_y] = \left[\frac{\delta y_q}{\delta L_q}, -\frac{\delta x_q}{\delta L_q} \right]. \quad (5b)$$

Po wyznaczeniu $\phi(\mathbf{p})$ oraz $c(\mathbf{p})$ potencjał prędkości w dowolnym punkcie ($\mathbf{p} \in \Lambda$) rozpatrywanego obszaru (Λ) wyznacza się ze związku całkowego:

$$\phi(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} \phi(\mathbf{q})E(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL + \int_{(L)} c(\mathbf{q})K(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL \quad (6)$$

$(\mathbf{q}) \in (L), (\mathbf{p}) \in (\Lambda)$

Wobec zależności (2) i (3) składowe prędkości w kierunku x i y w przyjętym układzie współrzędnych w punktach (\mathbf{p}) rozpatrywanego pola prędkości w obszarze (Λ) ograniczonym brzegiem (L) otrzymuje się różniczkując wyrażenia podcałkowe w wyrażeniu (6) odpowiednio względem x i y :

$$\left. \begin{aligned} c_x(\mathbf{p}) &= \frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial x_p} = - \int_{(L)} \phi(\mathbf{q}) \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} dL + \int_{(L)} c_n(\mathbf{q}) \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} dL \\ c_y(\mathbf{p}) &= \frac{\partial \phi(\mathbf{p})}{\partial y_p} = - \int_{(L)} \phi(\mathbf{q}) \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} dL + \int_{(L)} c_n(\mathbf{q}) \frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} dL \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

gdzie:

$$\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} = - \frac{1}{2\pi} \frac{x_q - x_p}{r_{pq}^2} \quad (7a)$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} = - \frac{1}{2\pi} \frac{\left((y_q - y_p)^2 - (x_q - x_p)^2 \right) n_x - 2(x_q - x_p)(y_q - y_p) n_y}{r_{pq}^4}$$

$$\frac{\partial K(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} = - \frac{1}{2\pi} \frac{y_q - y_p}{r_{pq}^2} \quad (7b)$$

$$\frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} = - \frac{1}{2\pi} \frac{\left((x_q - x_p)^2 - (y_q - y_p)^2 \right) n_y - 2(x_q - x_p)(y_q - y_p) n_x}{r_{pq}^4}$$

Moduł składowej prędkości jest równy:

$$c(\mathbf{p}) = \sqrt{(c_x(\mathbf{p}))^2 + (c_y(\mathbf{p}))^2} \quad (8)$$

Linie prądu dane są zależnościami [10]:

$$d\Psi = c_x(\mathbf{p}) dy - c_y(\mathbf{p}) dx \quad (9)$$

Analityczno-numeryczna metoda wyznaczenia linii prądu polega na scałowaniu jąder całkowych metody MEB zgodnie z (9). Po uwzględnieniu składowych prędkości (7) w (9) potencjał prądu w ruchu filtracyjnym wynosi:

$$\Psi(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} \phi(\mathbf{q}) W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL + \int_{(L)} c_n(\mathbf{q}) S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL + C \quad (10)$$

$(\mathbf{q}) \in (L), (\mathbf{p}) \in (\Lambda)$

gdzie, C jest to stała całowania wyznaczana z warunków brzegowych.

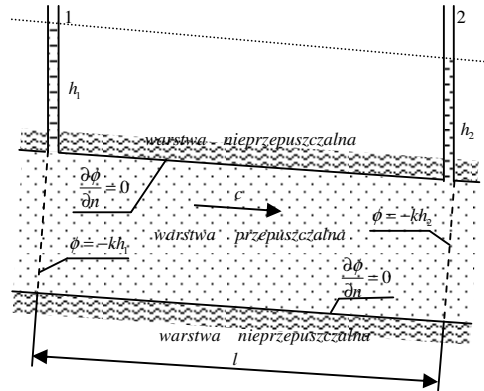
$$S(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = - \frac{1}{2\pi} \arctg \left(\frac{y_p - y_q}{x_p - x_q} \right), \quad (10a)$$

$$W(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = - \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q) n_y - (y_p - y_q) n_x}{r_{pq}^2}. \quad (10b)$$

3 Weryfikacja wyznaczania ruchu filtracyjnego metodą elementów brzegowych w zagadnieniach płaskich

W celu wykonania weryfikacji algorytmu została napisany w języku Fortran program komputerowy „GROUND FLOW 2D”. Jako zagadnienie testowe przyjęto przepływ

równomierny pod ciśnieniem (rys. 2) w piasku gruboziarnistym o współczynniku filtracji $k=0.06$ [cm/s], przy założeniu różnicy ciśnień między rurkami piezometrycznymi wynoszącej 0.519 m sł.w.



Rys. 2. Warunki brzegowe w równomiernym przepływie wód gruntowych

Fig. 2. Sketch to boundary in a ground-water flow

Prędkość filtracji ze wzoru analitycznego [1]:

$$c_T = k \frac{(h_1 - h_2)}{l} = k \frac{\Delta h}{l} \quad (11)$$

gdzie: $l=1$ [m] jest długością warstwy przepuszczalnej, gdzie jest mierzona różnica ciśnień Δh w rurkach piezometrycznych 1 i 2, natomiast k – jest to współczynnik filtracji dla piasku gruboziarnistego.

Liczba Reynoldsa wynosi 3 i została wyznaczona z następującego wzoru [10]:

$$Re = \frac{c_T d}{\nu m^{1/3}} \quad (12)$$

gdzie: $d=0.2$ [m] jest to średnica ziaren gruntu, $m=0.004$ [cm] jest współczynnikiem porowatości dla piasku gruboziarnistego, $\nu = 0,01307$ [cm²/s] jest współczynnikiem lepkości kinematycznej przepływającej wody przez warstwę przepuszczalną, natomiast c_T jest to prędkość przepływu wyznaczona ze wzoru (11).

Obliczenia wykonano dla brzegu składającego się z 16, 32, 64, 128, 256 oraz 512 elementów. Funkcje podcałkowe (5a-b), (7a-b) oraz (10a-b) obliczono całkowaniem numerycznym metodą trapezów przy założeniu 5 trapezów na pojedynczym elemencie. Błąd rozwiązania metody elementów brzegowych dla prędkości wyznaczono z zależności:

$$\delta c_{MEB} = \left| \frac{c_T - c_{MEB}}{c_T} \right| * 100\%, \quad (13)$$

gdzie: c_{MEB} oznacza prędkość wyznaczoną metodą elementów brzegowych, natomiast c_T jest to prędkość wyznaczona z rozwiązania teoretycznego (11).

Tabelaryczne zestawienie porównania rozwiązania numerycznego i teoretycznego wypadkowej prędkości znajduje się w tabeli 1.

Tab. 1. Wypadkowa prędkości - błąd rozwiązania MEB

Tab. 1. Velocity – error analysis applied in BEM

LP	Liczba elementów	Rozwiązanie teoretyczne	Rozwiązanie MEB	Błąd roz. MEB
-	n	c_T cm/s	c_{MEB} cm/s	$\delta_{c_{MEB}}$ %
1	16	3,112099800E-02	3,160165392E-02	1,544474634E+00
2	32	3,112099800E-02	3,124440027E-02	3,965241410E-01
3	64	3,112099800E-02	3,115122701E-02	9,713380657E-02
4	128	3,112099800E-02	3,112750708E-02	2,091539609E-02
5	256	3,112099800E-02	3,112188408E-02	2,847209463E-03
6	512	3,112099800E-02	3,112078459E-02	6,857427901E-04

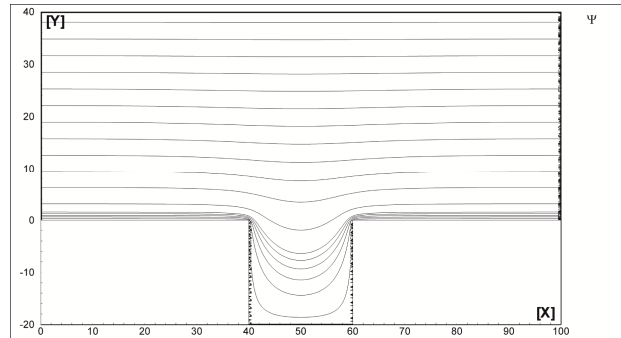
W przypadku brzegu składającego się z 16 elementów błąd metody MEB wynosi około 1.5 %, natomiast trzydziestodwukrotne zwiększenie gęstości powoduje zmniejszenie tego błędu do wartości 0.0007 %. Wraz ze wzrostem podziału brzegu błąd metody elementów brzegowych maleje.

4 Przykłady obliczeniowe

Poniżej przedstawiono przykłady obliczeniowe symulacji ruchu filtracyjnego między dwiema warstwami nieprzepuszczalnymi z prostokątnym wgłębieniem oraz prostokątnym uwypukleniem. Do obliczeń przyjęto współczynnik filtracji $k=0.06$ [cm/s] oraz różnicę ciśnień 0.519 [m sł.w].

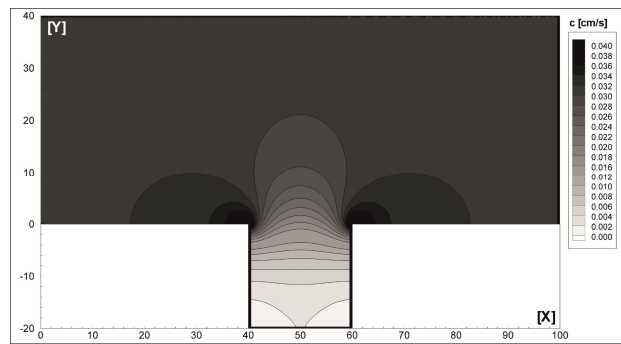
Na rysunku 3 wykreślono linie prądu wyznaczone metodą elementów brzegowych dla przepływu nad prostokątnym wgłębieniem, natomiast rysunek 4 przedstawia pole prędkości obliczone MEB.

Na rysunku 5 przedstawiono rozwiązanie numeryczne MEB linii prądu dla przepływu nad prostokątnym uwypukleniem, natomiast na rysunku 6 pole prędkości wyznaczone MEB.



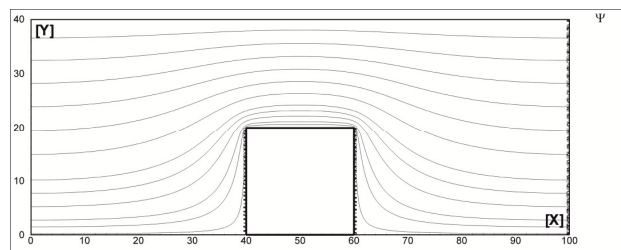
Rys. 3. Rozwiązanie numeryczne MEB linii prądu przepływu między dwiema warstwami nieprzepuszczalnymi z zadany prostokątnym wgłębieniem

Fig. 3. BEM solution- streamlines flow between two impenetrable planes with a rectangle cavity



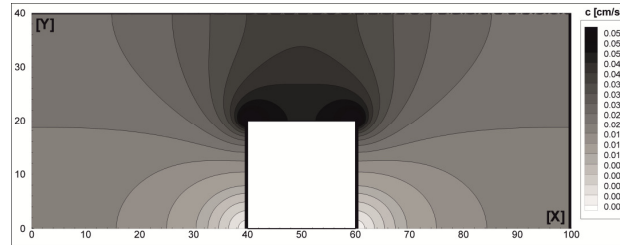
Rys. 4. Rozwiązanie numeryczne MEB pola prędkości przepływu między dwiema warstwami nieprzepuszczalnymi z zadany prostokątnym wgłębieniem

Fig. 4. BEM solution- velocity flow between two impenetrable planes with a rectangle cavity



Rys. 5. Rozwiązanie numeryczne MEB linii prądu przepływu między dwiema warstwami nieprzepuszczalnymi z zadany prostokątnym uwypukleniem

Fig. 5. BEM solution- streamlines flow between two impenetrable planes with a rectangle protrusion



Rys. 6. Rozwiązanie numeryczne MEB pola prędkości przepływu między dwiema warstwami nieprzepuszczalnymi z zadaniem prostokątnym uwypukleniem

Fig. 6. BEM solution- velocity flow between two impenetrable planes with a rectangle protrusion

5 Podsumowanie

Ze względu na małe prędkości przepływu filtracyjnego możliwe jest stosowanie teorii płynu idealnego w analizie ruchu filtracyjnego. Przedstawiony algorytm metody elementów brzegowych pozwala efektywnie przeprowadzać symulacje przepływu cieczy w ośrodkach porowatych, gdyż charakteryzuje się dużą dokładnością. Główne zalety metody elementów brzegowych w stosunku do często stosowanych w przepływach filtracyjnych metod siatkowych to: brak budowy pracochłonnych siatek a także duża szybkość obliczeniowa.

Literatura

1. Schwartz F.W., Zhang H.: *Fundamentals of Ground Water*. Wiley, 2002
2. Halek V., Svec J.: *Groundwater Hydraulics*. Elsevier Science, 1979
3. Wang H.F., Anderson P.M.: *Introduction to Groundwater Modeling Finite Difference and Finite Element Methods*. Academic Press, 1995
4. Salmasi F., Azamathulla H. M.: Determination of optimum relaxation coefficient using finite difference method for groundwater flow. *Arabian Journal of Geosciences*, Volume: 6, Issue: 9, pp. 3409 – 3415, September 2013
5. Li L. Zhou H., Jaime Gómez-Hernández J.: Steady-state saturated groundwater flow modeling with full tensor conductivities using finite differences. *Computers and Geosciences*, Volume: 36, Issue: 10, pp. 1211-1223, 2010
6. Shi L., Yang J.; Zeng L.: Application of multiscale finite element method in the uncertainty qualification of large-scale groundwater flow. *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment*, Volume: 26, Issue: 3, pp. 393 – 404, 2012
7. He X., Jiang L., David Moulton J.: A stochastic dimension reduction multiscale finite element method for groundwater flow problems in heterogeneous random porous media. *Journal of Hydrology*, Volume: 478, pp. 77-88, 2013
8. Lal A.M. W., Wang N., Moustafa M.Z., Brown M.C.: Mass residuals in implicit finite volume models for overland and groundwater flow. *Journal of Hydrology*, Volume: 384, Issue: 1-2, pp. 26-32, 2010
9. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag. NY 1984

10. Walden H., Stasiak J.: *Mechanika cieczy i gazów w inżynierii sanitarnej*. ARADY, Warszawa, 1971

Streszczenie

W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych (MEB) w płaskim ruchu filtracyjnym wód gruntowych. W celu wykonania symulacji napisano autorski program obliczeniowy „Ground Flow 2D”. Walidacja zaimplementowanego algorytmu została przeprowadzona w oparciu o równomierną filtrację ciśnieniową. W publikacji przedstawiono przykłady obliczeniowe ruchu wód gruntowych, dla których nie są znane rozwiązania analityczne.

Application Boundary Element Method to the analysis of groundwater flow

Summary

The paper deals with modeling of groundwater flow using Boundary Element Method. This algorithm can be used to simulation laminar flow in ground with constant hydraulic conductivity. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests and were compared with analytical solution. Results of numerical examples are presented. Computer program „Ground Flow 2D” was written in Fortran programming languages.

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/5/2011.