

**Roman BOGACZ, Włodzimierz CZYCHUŁA,**  
**Aleksandra PAWLAK-BURAKOWSKA**  
Politechnika Krakowska Wydział Inżynierii Budowlanej

## **Wpływ tłumienia na stateczność strumienia oscylatorów oddziałującego z belką. Stateczność przepływu cieczy.**

### 1 Wstęp

Stateczność ruchu układów mechanicznych z falą bieżącą należy do złożonych zagadnień mających zastosowanie w lotnictwie, kolejnictwie hydraulicznym i innych dziedzinach techniki. Szczególną rolę odgrywa tłumienie, które zwykle jest czynnikiem stabilizującym, ale często też bywa przyczyną destabilizacji układów. W niniejszej pracy rozważymy strumień gęsto rozłożonych oscylatorów oddziałujący sprężysto lub lepko-sprężysto z belką na podłożu Winkera. Układ taki może być uproszczonym modelem układu pociąg - tor lub modelem rurociągu przez który przepływa ciecz (dla uproszczenia nieściśliwa). Przepływ cieczy badany był już przez Hausnera w 1952 roku [1]. Przypadek stateczności nieograniczenie długiej rury modelowanej belką Bernoulli'ego-Eulera badał Roth [2]. Otrzymał on dwie różne wartości prędkości krytycznej; jedną w przypadku sprężystym, a drugą w granicznym przypadku intensywności tłumienia dążącej do zera. Prędkości krytyczne różniły się zależnie do ilorazu masy łącznej do masy rury,  $\Delta V_{kr} = [(m+m_0)m^{-1}]^{0.5} - 1$ . Podobne, pozornie paradoksalne wyniki uzyskano w pracach [3, 4]. W charakterze przykładu rozważymy wpływ tłumienia oraz wpływ rozkładu prędkości w przekroju rury na krytyczne prędkości przepływu.

### 2 Sformułowanie problemu

Rozważmy układ złożony z nieskończonej belki Bernoulli'ego - Eulera na sprężystym podłożu Winklera (modelujący rurę) wzdłuż której porusza się z prędkością  $V$  układ gęsto rozłożonych oscylatorów modelujących przepływającą ciecz. Równanie ruchu belki przyjmie postać:

$$EI W_{,xxxx} + T W_{,xx} + m W_{,tt} + b_l W_{,t} + c W + P(W - Y) = 0, \quad (2.1)$$

gdzie  $E$  jest modułem Younga,  $I$  - momentem bezwładności przekroju,  $T$  - siłą rozciągającą belkę,  $b_l$  - współczynnikiem tłumienia,  $c$  - współczynnikiem sprężystości,  $P$  - ciśnieniem wywieranym przez układ oscylatorów a  $W(x,t)$  i  $Y(x,t)$  oznaczają odpowiednio przemieszczenie belki i oscylatorów.

Równanie ruchu strumienia masy o gęstości  $m_0$  (układu oscylatorów) poruszającego się ze stałą prędkością  $V$  zapiszemy równaniem:

$$m_0 (Y_{,tt} - 2V Y_{,xt} + V^2 Y_{,xx}) + P(Y - W) = 0. \quad (2.2)$$

Oddziaływanie pomiędzy obu układami o jednostkowej sprężystości  $c_0$  i tłumieniu lepkiem  $b_0$  zapiszemy następująco:

$$P(Y-W) = b_0 [(Y-W),x - V(Y-W),t] + c_0(Y-W) \quad (2.3)$$

Rozwiązania równań ruchu poszukiwać będziemy w postaci następujących fal bieżących:

$$W(x,t) = A \exp i(kx-vt); \quad Y(x,t) = B \exp i(kx-vt); \quad (2.4)$$

gdzie  $k$ - jest liczbą falową a  $v$ - jest prędkością fazową fali.

Po podstawieniu rozwiązań o postaci (4) do układu równań (1)–(3) otrzymamy następujące zależności:

$$[EIk^4 + Tk^2 - mv^2k^2 + ib_1kv + c + ib_0(kv - kV) + c_0] A - [ib_0(kv - kV) + c_0] B = 0 \quad (2.5)$$

$$- [ib_0(kv - kV) + c_0] A - m_0[(k^2v^2 - 2k^2Vv + k^2V^2) + ib_0(kv - kV) + c_0] B = 0 \quad (2.6)$$

Oznaczając:  $v_0 = v - V$ ;  $R^2 = (EIk^2 - T + c_1/k^2)/m$ ;  $\mu = m/m_0$ ;  $\alpha^2 = c_0/m_0k^2$ ;  $\delta_j = b_j/m_0k$ , ( $j=1,2$ );

Równania charakterystyczne przyjmą postać:

$$[\mu(R^2 - v^2) - \alpha^2/\mu - i(\delta_1v + \delta_0v_0)] A + (\alpha^2 - i\delta_0v_0) B = 0 \quad (2.7a)$$

$$(-\alpha^2 + i\delta_0v_0) A + (\alpha^2 - v_0^2 - i\delta_0v_0) B = 0 \quad (2.7b)$$

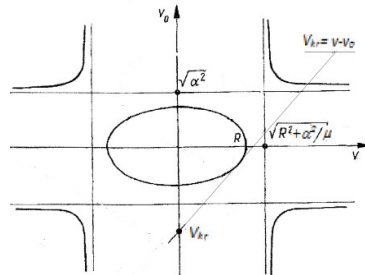
Ostatecznie jako warunek nietrywialnego rozwiązania układu równań (5) i (6), otrzymamy:

$$\Phi(v, v_0) = [\mu(R^2 - v^2) - \alpha^2] [\alpha^2 - v_0^2] - \alpha^2 - \delta_0\delta_1vv_0 + i \{ [\mu(R^2 - v^2) - \alpha^2] v_0\delta_0 + (\alpha^2 - v_0^2) v\delta_1 \} = 0 \quad (2.8)$$

Przypadek układu bez tłumienia otrzymamy przyjmując w równaniu (2.7)  $\delta_1 = \delta_2 = 0$ . Przedstawimy ten przypadek wykreślnie na rys. 2.1. Prędkość krytyczną określa punkt styczności prostej  $V = v - v_0$  do krzywej  $\Phi_R(v, v_0) = 0$ , którą stanowi część rzeczywista równania charakterystycznego. Punkt styczności jest pierwiastkiem podwójnym (wówczas rozwiązania rosną liniowo z czasem). Powyżej prędkości  $V_{kr}$  prędkości fazowe opisane są m.in. przez dwa pierwiastki rzeczywiste i dwa zespolone, sprzężone o postaci:

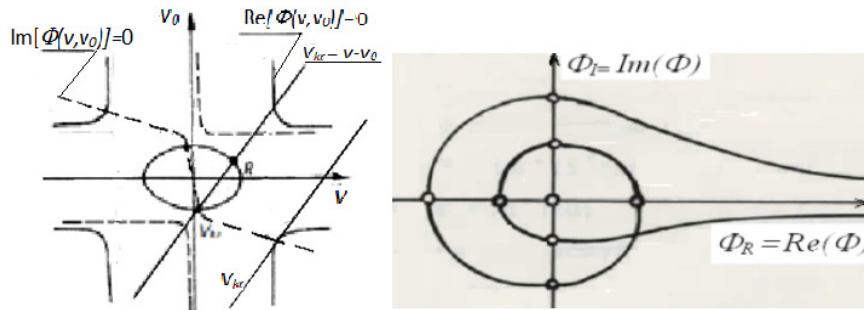
$$v_1 = v^* + i\mathcal{E}; \quad v_2 = v^* - i\mathcal{E} \quad (2.9)$$

Po podstawieniu (2.9) do (2.4) zauważymy, że co najmniej jedno z rozwiązań będzie narastać eksponencjalnie w czasie, co potwierdza niestaceczność układu przy  $V > V_{kr}$ .



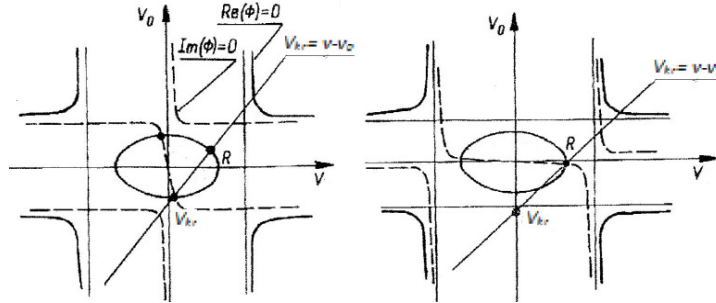
Rys. 2.1. Obraz prędkości fazowych  $Re[\Phi(v, v_0)] = 0$  układu sprężystego;  
 $V_{kr} = -v_0 + v = v - v_0$

Stateczność układu tłumionego badamy wykorzystując kryteria stateczności np. Hurwitz'a lub Michajłowa [4],[5]. Prędkość krytyczną wyznaczamy jako rzeczywiste pierwiastki spełniające część rzeczywistą i urojoną równania charakterystycznego  $Re[\Phi(v, v_0)] = 0$  i  $Im[\Phi(v, v_0)] = 0$ . Przypadek układu tłumionego podano na Rys. 2.2 Część rzeczywistą  $Re[\Phi(v, v_0)] = 0$  ilustruje linia ciągła a część urojoną  $Im[\Phi(v, v_0)] = 0$  ilustruje linia przerywana.

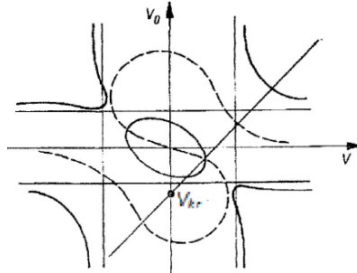


Rys. 2.2. Prędkości krytyczne określone przez  $Re[\Phi(v, v_0)] = 0$ ,  $Im[\Phi(v, v_0)] = 0$  oraz prostymi  $V_{kr} = v - v_0$  oraz ilustracja kryterium Michajłowa

W przypadku małej intensywności tłumienia ( $\delta_I \delta_0 \rightarrow 0$ ), wartość prędkości krytycznej zależy od ilorazu współczynników tłumienia zewnętrznego i wewnętrznego  $\delta_I / \delta_0$ . Przy  $\delta_I \delta_0 \rightarrow 0$  prędkość krytyczna ma przeważnie wartość mniejszą aniżeli w przypadku idealnie sprężystym. Tylko w szczególnym przypadku, przy określonej wartości  $\delta_I / \delta_0$  prędkość krytyczna układu lepko-sprężystego jest równa prędkości krytycznej układu idealnie sprężystego. Prędkość krytyczną odpowiadającą wyznaczonej prędkości przez Ruth'a w pracy [2] uzyskamy jako szczególny przypadek oddziaływania z rurą, tj. zakładając sprężysty przepływ przez zewnętrźnie tłumioną rurę oraz przyjmując, że  $\alpha$  dąży do nieskończoności oraz  $\delta_0 / \delta_I \rightarrow 0$ . Przy dużej intensywności tłumienia i iloczynie współczynników tłumienia  $\delta_I \delta_0 \gg 0$  zmienia się również kształt krzywych charakterystycznych reprezentujących część rzeczywistą  $Re[\Phi(v, v_0)] = 0$  równania (2.7) podobnie jak w przypadku lepko-sprężystego oddziaływania oscylatorów z belką Timoshenki [4]. Przypadek ten ilustruje rys. 2.4.



Rys. 2.3. Obraz płaszczyzny prędkości fazowych  $\Phi(v, v_0) = 0$  układu tłumionego, przypadki  $\delta_1 \delta_0 \rightarrow 0$  oraz  $\delta_1 / \delta_0 \rightarrow 0$  z lewej strony i  $\delta_1 / \delta_0 \rightarrow 0$  z prawej



Rys. 2.4. Przypadek lepko-sprężystego układu przy  $\delta_1 \delta_0 \gg 0$

Wyżej opisane oddziaływanie lepiej ilustruje fizykę procesu aniżeli założenie, że ciecz i rura mają takie same przemieszczenia. Wykażemy, że rozkład prędkości w rurze ma również wpływ na granicę stateczności.

### 3 Wpływ parametru $\mu$ oraz rozkładu prędkości na prędkość krytyczną

Przepływ cieczy w przypadku układu sprężystego (bez efektów lepkich) uzyskamy przyjmując w równaniach (2.1) - (2.3)  $Y(x, t) = W(x, t)$  lub w równaniu (8)  $1/\alpha^2 = \delta_0 = 0$ . W pierwszym przypadku równanie ruchu ma postać:

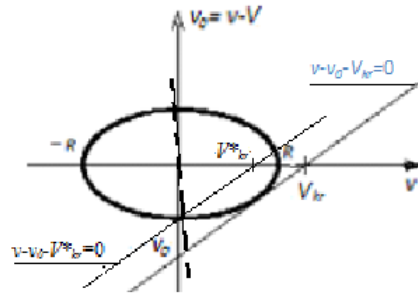
$$EI W_{,xxxx} + T W_{,xx} + m W_{,tt} + b_1 W_{,t} + c W + m_0 (W_{,tt} - 2V W_{,xt} + V^2 W_{,xx}) = 0 \quad (3.1)$$

Wówczas równanie charakterystyczne uprości się istotnie. Zapiszemy je następująco:

$$\Phi(v, v_0) = \mu (R^2 - v^2) - v_0^2 + i \delta_1 v = 0; \quad v_0 = v - V \quad (3.2)$$

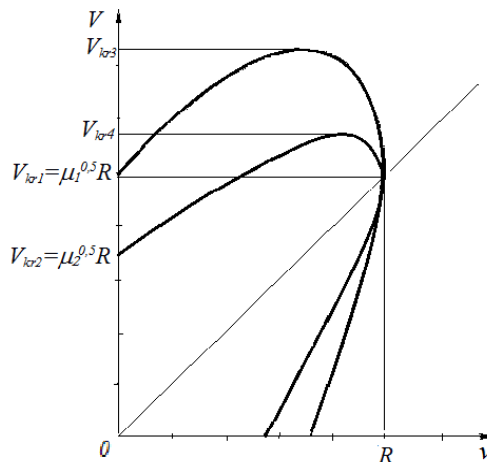
Rozważmy następujące przypadki krytycznych prędkości przepływu: przepływ o stałej prędkości w całym przekroju, który jest możliwy tylko w przypadku cieczy idealnej z rurą oddziałującą sprężysto z otoczeniem  $V_{kr}$  lub w przypadku oddziaływania lepko-sprężystego  $V_{kr}^*$  a następnie przepływ o profilu prędkości typowym dla cieczy lepkiej o prędkości na powierzchni wewnętrznej rury równej zero. W pierwszym przypadku  $V_{kr} > R$ , a w przypadku zewnętrznego tłumienia rury  $V_{kr}^2 = \mu R^2$  ( $V_{kr} = \mu^{0.5} R$ ). Zauważymy, że wraz z rosnącą wartością  $\alpha^2$  cztery gałęzie rozwiązań oddalają się zwiększając

zakres niestateczności, w przypadku granicznym do nieskończoności. Inny jakościowo rezultat otrzymamy zwiększając do nieskończoności intensywność tłumienia.



Rys. 3.1 Płaszczyzna  $\Phi(v, v_0) = 0$  z prędkościami krytycznymi: układu sprężystego  $V_{kr}$  i z tłumieniem zewnętrznym  $V_{kr}^*$

Prędkość krytyczna układu uzyskana z kryterium Michajłowa jest zgodna z zasadą minimum energii dyssypowanej. Ze zbioru możliwych prędkości w przypadku tłumionej rury rozwiązanie  $v = 0$  odpowiada falującej cieczy idealnej i odkształconej sinusoidalnie rurze, bez propagacji fali, ( $v=0$ ). W przypadku sprężystej rury i otoczenia, a niesprężystej cieczy krytycznym rozwiązaniem jest  $v_0=0$ , tj.  $V_{kr} = V_{kr1} = R$ . Wówczas fala propaguje się w rurze z prędkością przepływu cieczy. W szczególnym przypadku  $\mu=1,0$  obie prędkości krytyczne są sobie równe i wynoszą  $V_{kr}=R$ .

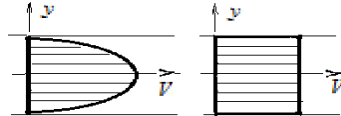


Rys. 3.2 Płaszczyzna  $\Phi(V, v) = 0$  przy  $\mu = 0,2$  i  $\mu = 1,0$  z prędkościami krytycznymi  $V_{kr}$  układu bez tłumienia  $V_{kr3}$  i  $V_{kr4}$  i z tłumieniem  $V_{kr1}$  i  $V_{kr2}$

W przypadku przepływu cieczy lepkiej rozkład prędkości możemy przybliżyć parabolą, np:

$$V(y) = V_0(1 - y^2), \quad 0 < y < 1. \quad V_{sr} = \int_0^1 V_{max} 2\pi y(1 - y^2) dy, \quad (3.3)$$

gdzie  $V_0$  jest maksymalną prędkością w osi rury a  $y$  promieniem bieżącym w osiowo symetrycznym przepływie. Porównywalna z prędkością stałą może być w tym przypadku tylko prędkość średnia  $V_{sr}$ .



Rys. 3.3. Rozkłady prędkości w rurze. Rozkład paraboliczny (z lewej) i prędkość stała (prostokątny po prawej stronie)

Płaszczyznę prędkości fazowych i prędkości krytyczne mierzone wydatkiem przepływającej cieczy w obu rozważanych przypadkach można porównać do wykresu podanego na Rys. 3.2. Przepływ cieczy o rozkładzie prostokątnym odpowiadać może przypadkowi układu sprężystego lub tłumionego zewnętrznie, zaś przypadek rozkładu parabolicznego przypadkowi sprężystej rury i lepkiej cieczy lub obu układów lepko-sprężystych tj. przypadkowi ilustrowanemu na Rys.2.4 przy  $\alpha$  dążącym do nieskończoności.

#### 4 Podsumowanie

Przedstawiono analizę zagadnienia oddziaływania układu gęsto rozłożonych oscylatorów z belką modelującego przepływ cieczy w rurze. Szczególną uwagę zwrócono na wpływ tłumienia oraz związku tłumienia z rozkładem prędkości cieczy w rurze. Wyjaśniono przyczyny istnienia różnicy prędkości krytycznych zależnej do ilorazu masy łącznej do masy rury podanej w pracy Ruth'a [2] związanej z ilorazem energii dyssypowanych w obu podukładach. Przedstawiona analiza wyjaśnia pozorny paradoks, że lepkość cieczy i tłumienie zewnętrzne może działać destabilizująco zmniejszając wartość prędkości krytycznej. Lepkość cieczy ponadto zmienia profil przepływającej cieczy, co ma dodatkowy wpływ na wartość krytyczną wydatku.

#### Literatura

1. Hausner, G.W.; Bending vibrations of pipeline containing flowing fluid. *J. Appl. Mech.* 19 (1952), pp. 205-208
2. Ruth, W.; Instabilitaet durchsroemter Rohre, *Ing.-Arch.* 33 (1964) pp. 236-263
3. Bogacz, R., Danielski, J., Popp, K.; On influence of viscosity on stability of train-track systems. *Arch. Mech.* 37 (1985) pp.621-630
4. Bogacz, R., Nowakowski, S.; On the influence of damping on the critical speed of mass – spring system moving on an elastic foundation. *J. Theor. Appl. Mech.* 3, 30, 1992, pp. 607-623
5. R. Bogacz, Selected problems of stability of motion of a continuous and discrete systems, in: *The Modern Methods of Stability of Structures*, (in Polish), Janowice 1985, Ossolineum 1987, pp. 7-75

6. R. Bogacz, W. Czyczuła, Response of Beam on Visco-Elastic Foundation to Moving Distributed Load, J. Theor. and Appl. Mech., 46,4, pp.763-775, Warsaw 2008

### Streszczenie

W niniejszej pracy rozważana jest stateczność ruchu układu złożonego ze strumienia gęsto rozłożonej masy (oscylatorów) oddziałującego sprężysto lub lepko-sprężysto z belką na podłożu Winkera (np. modelującej rurę). Układ taki może być uproszczonym modelem układu pociąg - tor lub modelem rurociągu, przez który przepływa ciecz (dla uproszczenia nieściśliwa).

**Słowa kluczowe:** stateczność przepływu, ruch względny, tłumienie

### Abstract

The paper is devoted to the stability of motion of the system composed of a stream of densely distributed mass (oscillators), elastic or visco-elastic interacting with a beam on the Winkler foundation (i.e. modeling a pipe). Such a system can be a simplified model of train-track system or pipe conveying fluid (for simplification non-compressive fluid).

Praca została częściowo finansowana z Projektu Badawczego NCN N N509 5376 40