

Anna KUMANIECKA, Michał PRĄCIK

Politechnika Krakowska, ul. Warszawska 24, 31-155 Kraków

Politechnika Krakowska, al. Jana Pawła II, 31-864 Kraków

E-mail: pukumani@cyf-kr.edu.pl, mp@sparc2.mech.pk.edu.pl

Drgania struktur dyskretno-ciągłych poddanych ruchomym układom obciążeń o dwupunktowym kontakcie

1 Wstęp

Badania drgań układów ciągłych wymuszonych ruchomymi obciążeniami są prowadzone w wielu ośrodkach naukowych zarówno ze względu na liczne zastosowania, jak również ze względów poznawczych. Szczególnie ważnym z punktu widzenia rozwoju i eksploatacji współczesnych szybkich kolei elektrycznych są drgania napowietrznych sieci zasilania trakcji kolejowej wymuszone ruchem odbieraka prądu. Modelowanie układu sieć trakcyjna – odbierak prądu jest problemem związanym z ruchem dwóch podukładów: ciągłego (przewód jezdny) i dyskretnego (odbierak prądu). Wybrany do analizy problem teoretyczny wywodzi się z grupy problemów technicznych, w których rozwiązuje się zagadnienie dynamiki układów poddanych działaniu obciążenia ruchomego [1]. Wyniki prac badawczych dotyczących zagadnienia drgań sieci trakcyjnej wzbudzanych ruchem odbieraka prądu są prezentowane w wielu publikacjach [2], [4]. Złożoność opisu analitycznego stanowiącego model matematyczny ruchu badanego układu sieć trakcyjna - odbierak prądu wymaga wykonania analizy numerycznej. Rozwój metod i technik badawczych umożliwia dzisiaj uwzględnienie wielu parametrów dynamicznych sieci trakcyjnej.

W pracy dokonano próby badania zjawisk dynamicznych wywołanych oddziaływaniem odbieraka prądu na sieć trakcyjną, przyjmując model sieci złożony z dwóch równoległe umieszczonych belek Bernoullego-Eulera i dyskretny, zredukowany, czteromasowy model odbieraka. Oddziaływanie odbieraka prądu modelowano dwoma ruchomymi siłami zmiennymi w czasie, poruszającymi się wzdłuż belki dolnej ze stałą prędkością v . W przyjętym modelu możliwe było uwzględnienie sztywności giętej przewodu jezdnego [3].

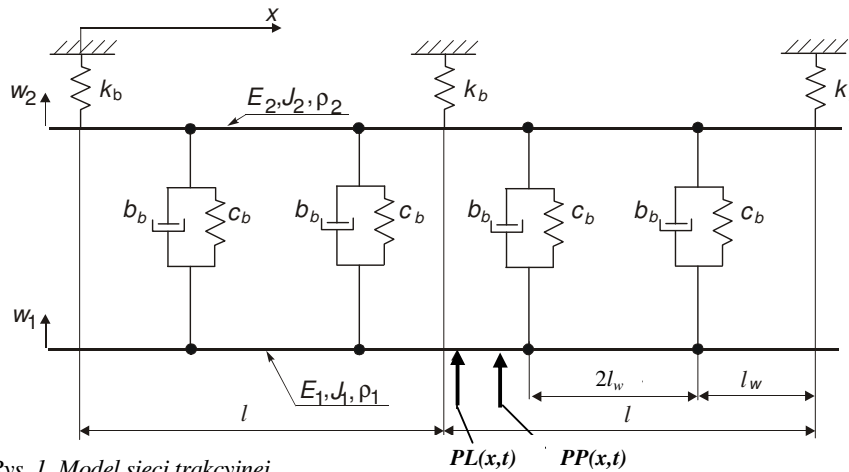
Dynamiczne zjawiska występujące w badanym układzie opisane są układem sprzężonych równań różniczkowych cząstkowych i zwyczajnych. Ich rozwiązanie otrzymano wykorzystując przybliżone metody numeryczne.

2 Model układu

W przyjmowanych w literaturze modelach sieci trakcyjnej liny nośne jak i zasilające są traktowane jako nierozciągliwe struny o skończonych lub nieskończonych długościach lub belki Bernoullego-Eulera [2]. Jako model fizyczny pantografu przyjmuje się oscylator, o dwóch lub czterech stopniach swobody, poruszający się wzdłuż liny zasilającej ze stałą prędkością, połączony z ciągnem lub z belką i otoczeniem elementami lepko-sprężystymi. Przyjęcie pewnych uproszczeń w modelowaniu jest związane z tym, że w warunkach

dynamicznego współdziałania odbieraka prądu z siecią trakcyjną występujące zjawiska fizyczne są bardzo złożone.

W prezentowanej pracy przyjęto płaski model sieci przedstawiony na rys. 1, złożony z dwóch równolegle umieszczonych belek Bernoulliego-Eulera, górnej modelującej linę nośną sieci trakcyjnej i dolnej będącej modelem przewodu jezdnego. Górna belka wieloprzęsłowa jest zamocowana za pomocą sprężyn o sztywności k_b w punktach odległych o l (odległość między ustrojami wsporczymi). Belki są powiązane elementami lepko-sprężystymi rozmieszczonymi w równych odstępach. Masy sprężyn modelujących wieszaki zostały pominięte.

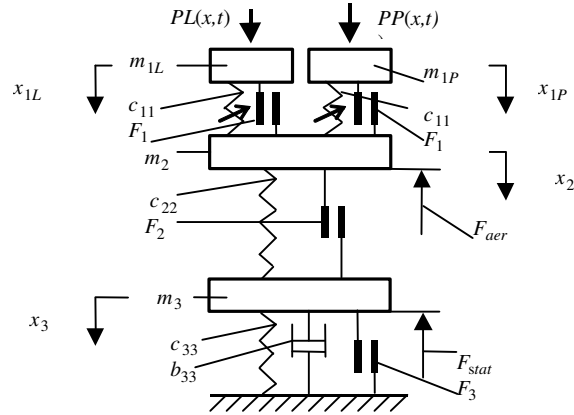


Rys. 1. Model sieci trakcyjnej

Fig. 1. Physical model of the catenary

W pracy przeprowadzono analizę ruchu układu przy następujących założeniach: drgania poprzeczne belek w płaszczyźnie pionowej są małe, belki są pryzmatyczne, jednorodne, obciążone poprzecznie, materiał belek jest liniowy i jednorodny, górna belka wieloprzęsłowa, dolna belka modelująca przewód jezdny jest nieskończenie długa i zawieszona na górnej belce, modelującej linę nośną, za pośrednictwem elementów lepko-sprężystych o współczynnikach b_b i c_b . Tłumienie w belkach pominięto, natomiast uwzględniono je w elementach łączących belki. Jako model odbieraka przyjęto dyskretny, zredukowany, czteromasowy model z ograniczeniem ruchu do jednego kierunku. Oddziaływanie przewodu jezdnego ograniczono do pozostawienia jedynie wymuszenia siłowego. Model fizyczny odbieraka prądu przedstawiono na rys. 2. Do opisu matematycznego modelu odbieraka przyjęto następujące założenia: układ wykonuje tylko drgania pionowe, zredukowane masy dolnego i górnego ramienia odbieraka wynoszą m_2 , m_3 , zredukowane masy ślizgaczy odbieraka prądu wynoszą m_{1L} , m_{2P} , element lepko-sprężysty o liniowej charakterystyce i stałych współczynnikach c_{33} , b_{33} łączy punkt materialny o masie m_3 z podstawą odbieraka prądu, elementy sprężyste łączące punkty materialne o masach m_2 , m_{1L} , m_{2P} mają charakterystykę nieliniową, tłumienie w parach kinematycznych odbieraka prądu ma charakter tarcia suchego, uwzględniono siłę aerodynamicznego oddziaływania strumienia powietrza na odbierak, nie występuje utrata

kontaktu pomiędzy odbierakiem a siecią trakcyjną, prędkość v poruszania się odbieraka prądu jest stała.



Rys. 2. Model odbieraka prądu
Fig. 2. Physical model of the pantograph

3 Równania ruchu układu

Równania ruchu sieci trakcyjnej pod wpływem zmiennych w czasie sił poprzecznych przemieszczających się wzdłuż przewodu ze stałą prędkością v przy uwzględnieniu sztywności giętej przewodu jezdnego zostały podane w monografii [2] i w pracy [3]. Oddziaływanie odbieraka prądu na przewód jezdny modelowane jest układem dwóch skupionych sił równoległych:

$$PL(x,t)\delta(x-vt); \quad PP(x,t)\delta(x-vt+x_{LP}) \quad (1)$$

gdzie:

$$PL(x,t) = k_0 \begin{cases} \left[1 - \alpha \cos\left(\frac{2\pi v}{l}t\right) \right] (x_{1L0} - w_1(x,t)) & \text{dla } x_{1L0} > w_1(x,t) \\ 0 & \text{dla } x_{1L0} \leq w_1(x,t) \end{cases} \quad (2)$$

$$PP(x,t) = k_0 \begin{cases} \left[1 - \alpha \cos\left(\frac{2\pi}{l}(vt+x_{LP})\right) \right] (x_{1P0} - w_1(x+x_{LP},t)) & \text{dla } x_{1P0} > w_1(x+x_{LP},t) \\ 0 & \text{dla } x_{1P0} \leq w_1(x+x_{LP},t) \end{cases}$$

Na rys. 2 zaznaczono współrzędne x_{1L} i x_{1P} ruchu ślizgaczy odbieraka „w pionie”:

$$x_{1L} \equiv w_1(x,t)\delta(x-vt) \quad \text{oraz} \quad x_{1P} \equiv w_1(x+x_{LP},t)\delta(x-vt+x_{LP}).$$

k_0, α - są współczynnikami określającymi sztywność przewodu jezdnego [4],

$$k_0 = \frac{k_{\max} + k_{\min}}{2} \quad \alpha = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\max} + k_{\min}} \quad (3)$$

k_{\max}, k_{\min} największą i najmniejszą wartością sztywności przewodu w przęśle, l długością przęśla, x_{LP} odległością punktów kontaktu ślizgaczy odbieraka z przewodem jezdny, x_{1L0} oraz x_{1P0} ugięcia wstępne lewego i prawego ślizgacza odbieraka.

Równania różniczkowe ruchu dwóch belek Bernoullego-Eulera po wprowadzeniu do nich zależności (1), (2) zawierają w swojej postaci wielkości charakteryzujące parametrycznie sztywność przewodu jeznego k_0, α , która w istocie jest też reprezentowana przez parametry E_1J_1, E_2J_2 sztywności modelu belkowego, uwzględniającego w swojej strukturze także sprężystość i tłumienie wieszaków – parametry c_b, b_b oraz siły naciągu N_1 i N_2 .

Przy zastosowaniu właściwej procedury równania te powinny służyć do identyfikacji parametrów k_0, α (metoda wyznaczania parametrów autoregresji).

Rozwiązania numeryczne układu równań różniczkowych ruchu sieci, czyli funkcje opisujące przemieszczenia poprzeczne belki dolnej i górnej można przyjąć w postaci kombinacji liniowej sum podwójnych, pochodzących od dwupunktowego wymuszenia ruchomymi obciążeniami.

Rozwiązania układu równań przyjęto w postaci:

$$w_1(x, t) = \sum_{p_1} \sum_{r_1} A_{r1} \frac{\sin\left(\frac{x-vt}{p_1 l_w}\right)}{\frac{x-vt}{p_1 l_w}} \sin(\omega_{r1} t - \varphi_{r1}) + \sum_{p_1} \sum_{r_1} B_{r1} \frac{\sin\left(\frac{x+x_{LP}-vt}{p_1 l_w}\right)}{\frac{x+x_{LP}-vt}{p_1 l_w}} \sin(\omega_{r1} t - \varphi_{r1}) \quad (4)$$

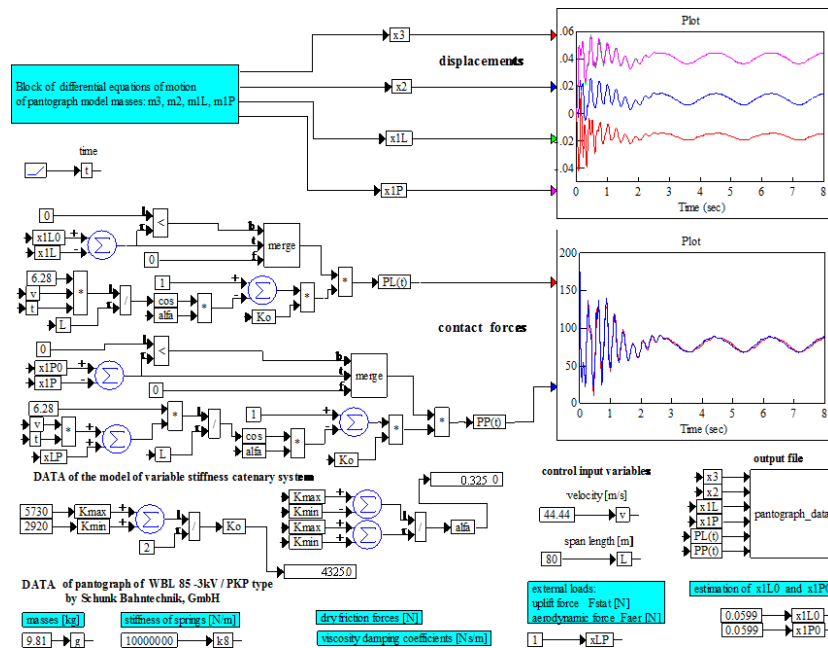
$$w_2(x, t) = \sum_{p_2} \sum_{r_2} A_{r2} \frac{\sin\left(\frac{x-vt}{p_2 l_w}\right)}{\frac{x-vt}{p_2 l_w}} \sin(\omega_{r2} t - \varphi_{r2})$$

gdzie wskaźniki p_i odnoszą się do modów fali biegnącej, a r_i do modów fali stojącej ($i = 1, 2$).

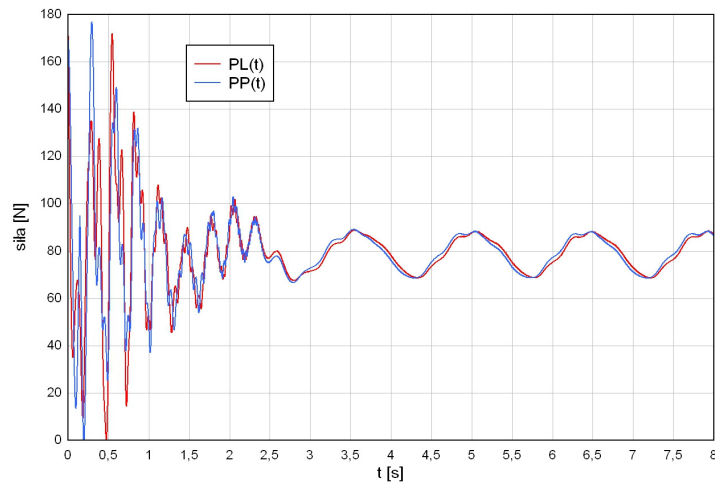
4 Obliczenia numeryczne

Do obliczeń numerycznych przyjęto następujące dane: $m_{1L} = m_{1P} = 7.93$ kg, $m_2 = 8.73$ kg, $m_3 = 10.15$ kg, $F_1 = 2.0$ N, $F_2 = F_3 = 2.5$ N, $F_{\text{aer}} = 30.0$ N, $c_3 = 60$ Ns/m, $x_{1LP} = 1.0$ m, $F_{\text{stat}} = 600$ [N], $F_{\text{aer}} = 30$ [N] (dane dla odbieraka prądu WBL 85 – 3 kV/PKP).

Na podstawie układu równań zbudowano program symulacyjny (wykorzystując pakiet VisSim & Analyze), którego schemat blokowy przedstawiono na rys. 3.

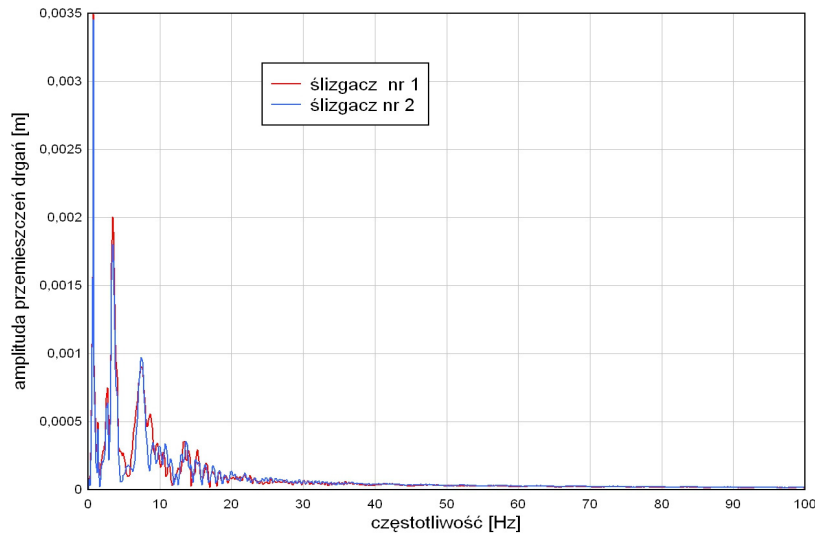


Rys. 3. Schemat blokowy programu symulacyjnego dla przemieszczeń i sił kontaktowych
Fig. 3. The block scheme of simulation of displacements and contact forces



Rys. 4. Zmiany sił kontaktowych pantografu o dwupunktowym kontakcie
Fig. 4. Variability of contact forces of pantograph with two contact points

Na rys. 4 przedstawiono rezultaty badań symulacyjnych zmian sił kontaktowych pantografu o dwupunktowym kontakcie w przypadku wzbudzenia w dolnej belce fali $w_1(x,t)$ takiej, że w danej chwili na pantografie spełnione są warunki $x_{1L0} = -0.001$ m, $x_{1P0} = 0.002$ m. Wynika stąd, że przy zachowaniu kontaktu dwupunktowego amplituda początkowa drgań między punktami pantografu odległymi o 1 m wynosi 3 mm. Badania symulacyjne wykonano przy prędkości ruchu pantografu wynoszącej $v = 55,55$ m/s ok. 200 km/h. Można stwierdzić, że pantograf dwupunktowy zapewnia lepszy kontakt (odrywanie ślizgaczy jest naprzemiennie).



Rys. 5. Widma FFT przemieszczeń drgań

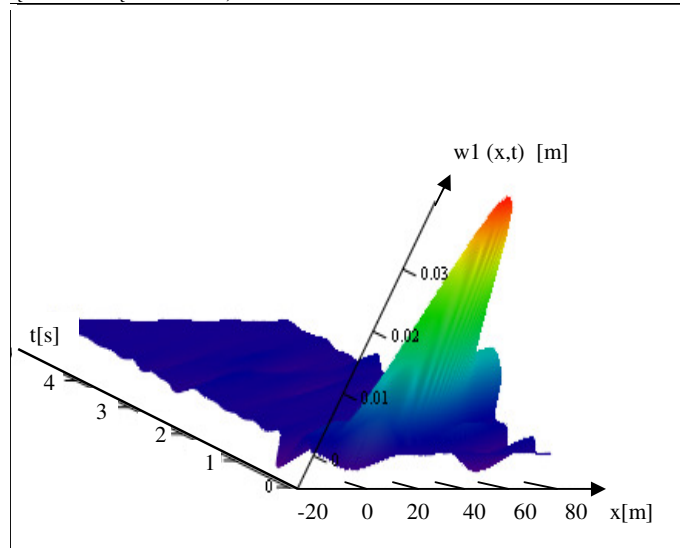
Fig. 5. Spectrum FFT of vibration displacements

Analiza rezultatów symulacji (rys. 5) wskazuje, że dominujące są składowe niskoczęstotliwościowe podobnie jak w przypadku pantografu z jednopunktowym kontaktem, natomiast dla pantografu z dwupunktowym kontaktem bardziej efektywne jest tłumienie modalne.

W postaci rozwiązań przedstawionych równaniami (4) założono, że reprezentują one złożenie poszczególnych modów fal. Rozwiązanie całego zagadnienia współdziałania modelu pantografu z modelem trakcji jest związane z liczbą modów niezbędnych do uwzględnienia w przyjętej postaci rozwiązań, aby zapewnić odpowiednią, zakładaną zbieżność numeryczną przy wyznaczaniu współczynników rozwinięć falowych.

Symulacje numeryczne przemieszczeń drgań belek ustroju i pantografu wymagają przeprowadzenia obliczeń przy różnych wartościach zadawanych parametrów. Wynik przykładowej symulacji drgań dolnej belki modelu trakcji dla dwupunktowego kontaktu przedstawiono na rys. 6. Widoczne jest przekroczenie krytycznej wartości amplitudy przemieszczeń drgań – krytycznej w stosunku do przyjętej przykładowo wartości ugięć

$x_{1Lo} = x_{1Po} = 3$ cm (dla zadanych parametrów modelu trakcji i pantografu, przy prędkości rzędu 55 m/s).



Rys. 6. Wynik symulacji drgań dolnej belki modelu trakcji

Fig. 6. Result of simulation of the lower beam vibration of the catenary model

5 Wnioski i uwagi końcowe

Analiza rezultatów symulacji przeprowadzonych na przyjętym modelu współpracy pantografu z trakcją pokazała w widmie przemieszczeń drgań modelu belki (dolnej, zasilającej) dominujące składowe niskoczęstotliwościowe, podobnie jak w przypadku pantografu z jednopunktowym kontaktem. Dla modelu pantografu z dwupunktowym kontaktem tłumienie modalne jest bardziej efektywne niż przy modelu ruchu pantografu z jednopunktowym kontaktem.

Z analizy wyników symulacji przemieszczeń drgań dolnej belki ustroju trakcji wynika, że ruchowi pantografu towarzyszy ciąg fal (analizowano złożenie trzech modów fal biegnących i trzech stojących), w których złożeniu można zauważyć maksimum poprzedzające i minimum „wsteczne” przemieszczeń, przy czym stosunek wartości bezwzględnej maksimum do wartości bezwzględnej minimum „wstecznej” fali wynosi ponad 9. Tłumienie wzbudzonej w niższej belce amplitudy przemieszczeń drgań jest zmienne w czasie i przestrzeni np. obniżenie amplitudy maksymalnej przemieszczeń drgań o ok. 20 dB następuje po czasie ok. 0,6 s, przy analizie na odcinku rzędu 100 m.

Przy symulacji wyższych prędkości ruchu pantografu i analizie kolejnych wzbudzanych częstotliwości drgań własnych trakcji pojawia się na przestrzenno-czasowym wykresie przemieszczeń drgań wyraźniejsze oddziaływanie pantografu z dwupunktowym kontaktem, widoczne stają się dwa „biegnące” równoległe ekstrema - maksima fal (usytuowane pod kątem do osi czasu – w układzie $w_1(x,t)$).

Aktualny stan badań teoretycznych i doświadczalnych wskazuje na potrzebę prowadzenia dalszych prac w kierunku doskonalenia modelowania układu jak również badań eksperymentalnych umożliwiających weryfikację założeń odnoszących się do współpracy linii zasilającej z pantografem.

Literatura

1. Bajer C.I., Dyniewicz B., *Numerical analysis of vibrations of structures under moving inertial load*, Springer 2012.
2. Kumaniecka A., *Metody analizy drgań układów dyskretno - ciągłych i ich zastosowanie do problemów transportu szynowego*, Monografia 352, seria Mechanika, Politechnika Krakowska 2007.
3. Kumaniecka A., Prącik M.: *Modeling of the catenary-pantograph system*, Machine Dynamics Research, 2011, (w druku).
4. Poetsch G., Evans J., Meisinger R., Kortum W., Baldauf W., Veitl A., Wallaschek J.: *Pantograph/ Catenary Dynamics and Control. Vehicle System Dynamics* 28, 1997, 159-195.

Streszczenie

W pracy dokonano próby badania zjawisk dynamicznych wywołanych oddziaływaniem odbieraka prądu na sieć trakcyjną, przyjmując model sieci złożony z dwóch równolegle umieszczonych belek Bernoullego-Eulera i dyskretny, zredukowany, czteromasowy model odbieraka. Oddziaływanie odbieraka prądu modelowano dwoma ruchomymi siłami zmiennymi w czasie, poruszającymi się wzdłuż belki dolnej ze stałą prędkością. Uwzględniono także sztywność giętną przewodu jezdnego. Równania różniczkowe ruchu belek zawierają wielkości charakteryzujące parametrycznie sztywność przewodu jezdnego, która jest też reprezentowana przez parametry sztywności modelu belkowego, uwzględniającego także sprężystość i tłumienie wieszaków oraz siły naciągu belek. Przy zastosowaniu właściwej procedury równania służą do identyfikacji parametrów sztywności przewodu jezdnego. Dynamiczne zjawiska występujące w układzie opisane są układem sprzężonych równań różniczkowych, którego rozwiązanie otrzymano wykorzystując przybliżone metody numeryczne.

Słowa kluczowe: dynamika, sieć trakcyjna, odbierak prądu

Vibration of the discrete-continuous structures under moving loads with two contact points

Summary

In the paper the results of investigation of the dynamical phenomena cause by interaction between pantograph and catenary are presented. The catenary system is considered to be a set of two beams model. The pantograph is regarded as the four degrees of freedom model. Two, time varying, moving along lower beam at constant

velocity loads are used as a model of interaction forces. The stiffness of the catenary wire was taken into account. The differential equations of beams motion include parameters describing catenary stiffness which is also represented by the parameters of beam model stiffness. Applying proper procedure these equations are used to identification of catenary stiffness. Dynamical phenomena occur in considered system are described by the set of differential equations. The solution of these equations was obtained using approximate numerical methods.

Keywords: dynamics, catenary, pantograph