

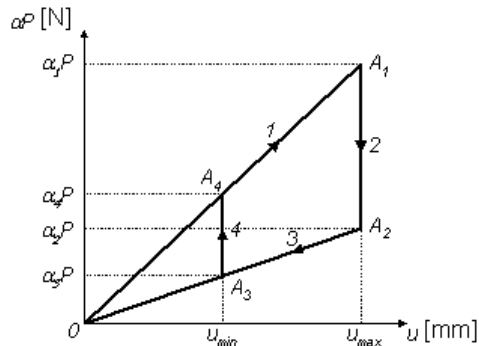
**Andrzej ANDRZEJUK**

Politechnika Warszawska, IPBM, 02-524 Warszawa, ul. Narbutta 84,  
E-mail: mang@ipbm.simr.pw.edu.pl

## **Badanie analityczne i doświadczalne modelu połączenia ciernego tuleja –wał**

### 1 Wstęp

Praca jest poświęcona badaniom rozpraszania energii modelu stożkowego połączenia ciernego tulei z wałem. W tym celu zbudowany został model matematyczny poddany obciążeniu zewnętrznemu podczas fazy ruchu ustalonego. W rozważaniach wykorzystano metodę analityczną oraz numeryczną. Do zbudowania modelu matematycznego układu mechanicznego jest wymagana postać zależności obciążenia w funkcji przemieszczenia czyli postać odwrotna w stosunku do otrzymanej z rozważań statycznych. Matematyczny opis tarcia konstrukcyjnego jest zagadnieniem skomplikowanym ze względu na opisanie stanu naprężeń i odkształceń oraz złożoność samego procesu tarcia. Dlatego opiera się on na uproszczonych założeniach, które dotyczą sił tarcia oraz rozkładu naprężeń i odkształceń. Przyjmując założenia, że siły tarcia podlegają prawu Coulomba, a własności materiału prawu Hooke'a. Zadanie dotyczy wyznaczenia przemieszczeń względnych, w zależności od obciążeń zewnętrznych i wyznaczenia oraz analizy pętli histerezy konstrukcyjnej badanego połączenia (rys.1). Uwzględniono odkształcenie połączenia i zagadnienie Lamé'go.



*Rys.1. Teoretyczna pętla histerezy połączenia tuleja-wał*

*Fig.1. Hysteresis loop of the sleeve-shaft joint*

W rozważaniach przyjęto dwa sposoby określania promienia obliczeniowego  $r_0$  (rys.2b), a więc:

$$a) \quad r_0 = \frac{2\pi \cdot \int_{r_w}^{r_z} \mu \cdot p \cdot \rho^2 \cdot d\rho}{2\pi \cdot \int_{r_w}^{r_z} \mu \cdot p \cdot \rho \cdot d\rho} = \frac{2}{3} \cdot \frac{r_z^3 - r_w^3}{r_z^2 - r_w^2}, \quad b) \quad r_0 = R - x \operatorname{tg} \beta. \quad (1)$$

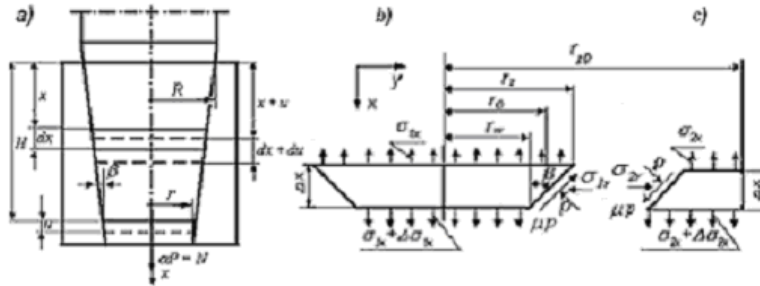
gdzie:  $\mu$  – współczynnik tarcia,  $p$  – nacisk jednostkowy,  $\rho$  – bieżący promień tarcia wycinka,  $r_w, r_z, R$  – rys.2a,b.

## 2 Wyznaczenie przemieszczeń wycinka stożkowego połączenia tuleja – wał

Uproszczony model stożkowego połączenia tuleja-wał uwzględniający zagadnienie Lamé'go przedstawiono na rysunku 2a.

Wyznaczono przemieszczenia oraz straty energii dzieląc rozważania na cztery etapy obciążeń (I, II, III, IV). W pierwszej kolejności rozpatrzono wycinek połączenia tulei z wałem o wysokości  $\Delta x$  (rys.2b,c), a następnie wyznaczono poszukiwane zależności obowiązujące dla całego modelu.

Rozpatrzenie omawianego wycinka połączenia umożliwiło wyznaczenie naprężeń występujących w elementach połączenia.



Rys.2. Badany układ mechaniczny: a) połączenie tuleja-wał, b) wycinek wału, c) wycinek tulei

Fig.2. The tested mechanical system: a) sleeve-shaft joint, b) sector of the shaft, c) sector of the sleeve

**Etap I** – obciążanie wycinka połączenia tuleja-wał (rys.2a) ( $0 \leq aP \leq \alpha_1 P$ ) (rys. 1)

### Rozważania dotyczące wycinka wału zilustrowanego na rysunku 2b

Równanie równowagi sił działających na wycinek wału wzdłuż osi x można opisać równaniem:

$$\begin{aligned} & -\sigma_{1x} \cdot \pi \cdot r_0^2 - \mu \cdot p \cdot \cos \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + \\ & - p \cdot \sin \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + (\sigma_{1x} + \Delta\sigma_{1x}) \cdot \pi \cdot r_0^2 = 0 \end{aligned} \quad (1)$$

gdzie  $\mu$  – współczynnik tarcia ;  $p$  – nacisk jednostkowy na powierzchni styku.

Równanie równowagi sił działających na wycinek wału wzdłuż osi y

$$\begin{aligned} & -\sigma_{1r} \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + \mu \cdot p \cdot \sin \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + \\ & - p \cdot \cos \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

**Rozważania dotyczące wycinka tulei (Rys. 2c)**

Równanie równowagi sił działających na wycinek tulei wzdłuż osi x przyjmie postać

$$\begin{aligned} & -\sigma_{2x} \cdot \pi \cdot (r_{z0}^2 - r_0^2) + \mu \cdot p \cdot \cos \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + p \cdot \sin \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + \\ & + (\sigma_{2x} + \Delta\sigma_{2x}) \cdot \pi \cdot (r_{z0}^2 - r_0^2) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

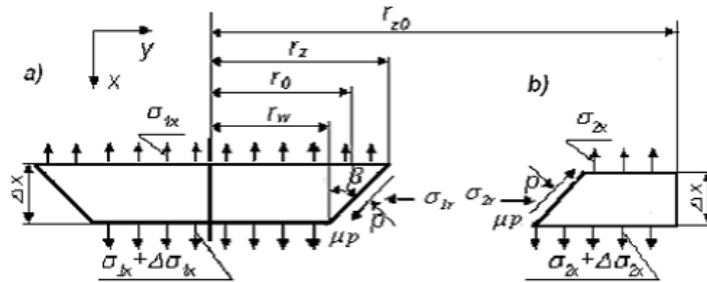
natomiast równanie równowagi sił działających na wycinek tulei w kierunku promieniowym (wzdłuż osi y) przyjmie formę

$$\sigma_{2r} \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} - \mu \cdot p \cdot \sin \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + p \cdot \cos \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} = 0. \quad (4)$$

**Etap II** – odciążanie wycinka połączenia tuleja-wał ( $\alpha_2 P \leq aP \leq \alpha_1 P$ ) - brak wzajemnego przemieszczenia.

**Etap III** – odciążanie wycinka połączenia tuleja-wał ( $\alpha_3 P \leq aP \leq \alpha_2 P$ )

Wartość sił tarcia równa  $-\mu \cdot p$  zostaje osiągnięta dla takiego naprężenia  $\sigma_x$ , że elementy układu zaczną przemieszczać się z powrotem. Obciążenie wycinka połączenia odpowiadające tej fazie procesu przedstawiono na rysunku 3.



Rys.3. Odciążanie układu a) wycinek wału, b) wycinek tulei  
Fig.3. The unloading of the system a) shaft sector, b) sleeve sector

**Rozważania dotyczące wycinka wału (Rys. 3a)**

Równanie równowagi sił działających na układ wzdłuż osi x (rys.3a) przyjmuje postać

$$-\sigma_{1x} \cdot \pi \cdot r_0^2 - p \cdot \sin \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + \mu \cdot p \cdot \cos \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} +$$

$$+(\sigma_{1x} + \Delta\sigma_{1x}) \cdot \pi \cdot r_0^2 = 0. \quad (5)$$

Równanie równowagi sił działających wzdłuż osi y (rys.3a) jest następujące

$$-\sigma_{1r} \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} - \mu \cdot p \cdot \sin \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} -$$

$$- p \cdot \cos \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} = 0 \quad (6)$$

**Rozważania dotyczące wycinka tulei (Rys.3b)**

Równanie równowagi sił działających na wycinek tulei wzdłuż osi x (rys.3b) opisano zależnością

$$-\sigma_{2x} \cdot \pi \cdot (r_{z0}^2 - r_0^2) - \mu \cdot p \cdot \cos \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + p \cdot \sin \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} +$$

$$+(\sigma_{2x} + \Delta\sigma_{2x}) \cdot \pi \cdot (r_{z0}^2 - r_0^2) = 0 \quad (7)$$

Równanie równowagi sił działających na wycinek tulei wzdłuż osi y (rys.3b) opisano zależnością

$$\sigma_{2r} \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + \mu \cdot p \cdot \sin \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} + p \cdot \cos \beta \cdot 2\pi \cdot r_0 \cdot \frac{\Delta x}{\cos \beta} = 0. \quad (8)$$

**Etap IV** – powtórne obciążanie wycinka połączenia ( $\alpha_3 P \leq \alpha P \leq \alpha_4 P$ ) - brak wzajemnego przemieszczenia.

**3** Określenie przemieszczenia osiowego w funkcji obciążenia zewnętrznego dla poszczególnych etapów obciążania połączenia tuleja-wał

Przedstawione na rysunku 2, połączenie tuleja-wał o wysokości współpracy  $H$ , rozpatrzone jako połączenie dużej liczby wycinków  $\Delta x$ . Pozwala to na zastąpienie funkcji  $\frac{\Delta\sigma_{1x}}{\Delta x}$ , funkcją w postaci pochodnej  $\frac{d\sigma_{1x}}{dx}$ .

**Przypadek a)** - rozważmy dla powyższego modelu, że promień  $r_0$  jest określony wzorem 1a.

Wykorzystując podstawowe wzory prawa Hooke'a oraz symetrii naprężeń i odkształceń przy uwzględnieniu zagadnienia Lamé'go otrzymamy równanie różniczkowe drugiego rzędu o stałych współczynnikach, a więc

$$\sigma_{1x}'' + a_0 \cdot \sigma_{1x}' - b_0 \cdot \sigma_{1x} = 0 \quad (9)$$

Po rozwiązaniu powyższego równania i wyznaczeniu naprężeń, w zależności od działającej siły zewnętrznej  $\alpha P$ , wzór na przemieszczenie osiowe krańcowego przekroju ( $x=H$ ) przyjmuje postać:

**etap I**

$$u_1(x=H) = \frac{\alpha \cdot P}{\pi \cdot r_0^2} \cdot \left( z_4 - \frac{a_0}{2} \cdot z_3 + \frac{z_3 \cdot \sqrt{a_0^2 + 4b_0}}{2th \left[ \frac{H}{2} \sqrt{a_0^2 + 4b_0} \right]} \right), \quad (10)$$

**etap III**

$$u_3(x=H) = \frac{\alpha \cdot P}{\pi \cdot r_0^2} \cdot \left( z_8 - \frac{a_1}{2} \cdot z_7 + \frac{z_7 \cdot \sqrt{a_1^2 + 4b_1}}{2th \left[ \frac{H}{2} \sqrt{a_1^2 + 4b_1} \right]} \right). \quad (11)$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2 \cdot \nu_1 \cdot [tg\beta + \mu - \sin \beta \cdot (1 - tg\beta)]}{r_0 \cdot \cos \beta \cdot (1 - \mu \cdot tg\beta) \cdot (1 - \nu_1)}, & b_0 &= \frac{2 \cdot tg\beta \cdot (tg\beta + \mu)}{r_0^2 \cdot \cos \beta \cdot (1 - \mu \cdot tg\beta) \cdot (1 - \nu_1)}, \\ a_1 &= \frac{2 \cdot \nu_1 \cdot [tg\beta - \mu - \sin \beta \cdot (1 + \mu \cdot tg\beta)]}{r_0 \cdot \cos \beta \cdot (1 + \mu \cdot tg\beta) \cdot (1 - \nu_1)}, & b_1 &= \frac{2 \cdot tg\beta \cdot (tg\beta - \mu)}{r_0^2 \cdot \cos \beta \cdot (1 + \mu \cdot tg\beta) \cdot (1 - \nu_1)}. \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie:  $z_3, z_4, z_7, z_8$  – stałe wiążące dane materiałowe i parametry geometryczne modelu,

**Przypadek b)** – rozważmy dla powyższego modelu, że promień  $r_0$  jest określony wzorem 1b.

Postępując analogicznie jak powyżej przy rozpatrywaniu etapu I i III otrzymano przemieszczenie osiowe  $u_{1,3}(x=H)$  jako wynik rozwiązania równań różniczkowych drugiego rzędu o zmiennych współczynnikach, których postać jest następująca

**etap I**

$$\eta_3 \cdot (R - x \cdot tg\beta)^2 \cdot \sigma''_{1x} + \eta_6 \cdot (R - x \cdot tg\beta) \cdot \sigma'_{1x} - \eta_7 \cdot \sigma_{1x} = 0. \quad (13)$$

**etap III**

$$\eta_9 \cdot (R - x \cdot tg\beta)^2 \cdot \sigma''_{3x} + \eta_{10} \cdot (R - x \cdot tg\beta) \cdot \sigma'_{3x} - \eta_{11} \cdot \sigma_{3x} = 0. \quad (14)$$

gdzie:  $\eta_3, \eta_6, \eta_7, \eta_9, \eta_{10}, \eta_{11}$  – stałe wiążące dane materiałowe i parametry geometryczne modelu,

Przemieszczenie osiowe można wyrazić wzorem

**etap I**

$$u_1(x=H) = \frac{\alpha \cdot P}{\pi \cdot r} \left[ \eta_4 + \frac{\eta_3 \cdot tg\beta \cdot (\lambda_9 \cdot R^{\lambda_{10}-\lambda_9} \cdot r^{\lambda_9} - \lambda_{10} \cdot r^{\lambda_{10}})}{(r^{\lambda_{10}} - R^{\lambda_{10}-\lambda_9} \cdot r^{\lambda_9})} \right], \quad (15)$$

**etap III**

$$u_3(x=H) = \frac{\alpha \cdot P}{\pi \cdot r} \left[ \eta_4 + \frac{\eta_9 \cdot \operatorname{tg} \beta \cdot (\lambda_{11} \cdot R^{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \cdot r^{\lambda_{11}} - \lambda_{12} \cdot r^{\lambda_{12}})}{(r^{\lambda_{12}} - R^{\lambda_{12}-\lambda_{11}} \cdot r^{\lambda_{11}})} \right]. \quad (16)$$

gdzie:  $\lambda_9, \lambda_{10}, \lambda_{11}, \lambda_{12}$  – pierwiastki równań charakterystycznych

**4 Wyznaczenie energii rozpraszania dla jednego cyklu obciążania układu**

Pole pętli histerezy (Rys.1), które jest miarą rozpraszania energii, można wyznaczyć ze wzoru :

przypadek (a) 
$$\psi_a = \frac{P^2}{2\pi \cdot r_0^2} \left[ \alpha_1^2 \cdot z_{14} \cdot \left( 1 - \frac{z_{14}}{z_{17}} \right) - \alpha_3^2 \cdot z_{17} \cdot \left( \frac{z_{17}}{z_{14}} - 1 \right) \right], \quad (17)$$

przypadek (b) 
$$\psi_b = \frac{P^2}{2} \cdot (m_{19} - m_{17}) \cdot \left[ \alpha_1^2 \cdot \frac{(m_{17} + m_{18})}{(m_{19} + m_{18})} - \alpha_3^2 \cdot \frac{(m_{19} + m_{18})}{(m_{17} + m_{18})} \right]. \quad (18)$$

$m_{17}, m_{18}, m_{19}, z_{14}, z_{17}$  – stałe wiążące dane materiałowe i parametry geometryczne modelu,

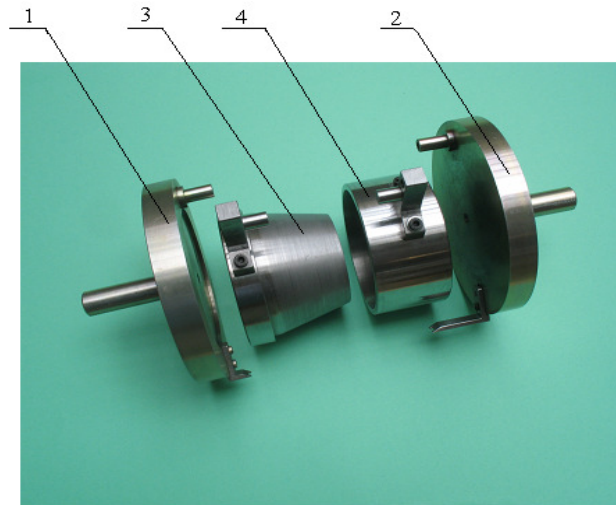
**5 Badania doświadczalne**

Badania doświadczalne miały na celu weryfikację opisu matematycznego modelu tarcia najbliższego modelowi rzeczywistemu, w którym teoretyczne pole pętli histerezy jest zbliżone do doświadczalnego. Na potrzeby badań eksperymentalnych zaprojektowano i wykonano model pary ciernej połączenia stożkowego tuleja – wał (Rys.4).

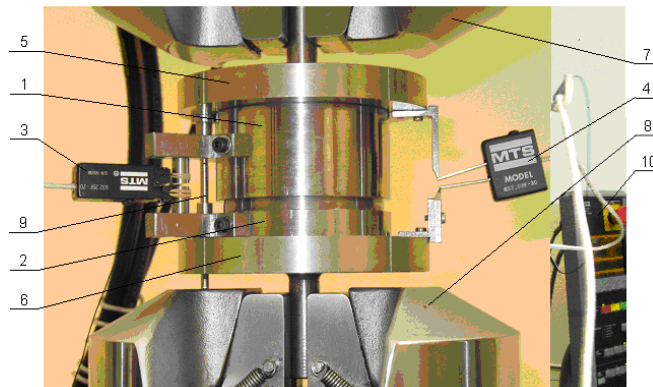
Badania wykonano na maszynie wytrzymałościowej MTS (Rys.5) w Instytucie Podstaw Budowy Maszyn Politechniki Warszawskiej, przy wykorzystaniu oprogramowania TestWareSX.

Metodyka eksperymentu polegała na obciążaniu układu do założonej wartości siły maksymalnej  $P_{max}$ . Następnie układ odciążano do założonej wartości  $P_{min}$  i ponownie obciążano. Rysunek 6 przedstawia charakterystykę  $P(u)$ , uzyskaną w badaniach modelu w czterech cyklach pomiarowych. Program sterowania obciążaniem był prowadzony w następujący sposób: obciążanie wstępne (wzrost siły do  $P_{max}$  oraz utrzymanie obciążenia przez 10s), obciążanie właściwe (jeden lub cztery cykle obciążania).

*Badanie analityczne i doświadczalne modelu  
połączenia ciernego tuleja –wał*

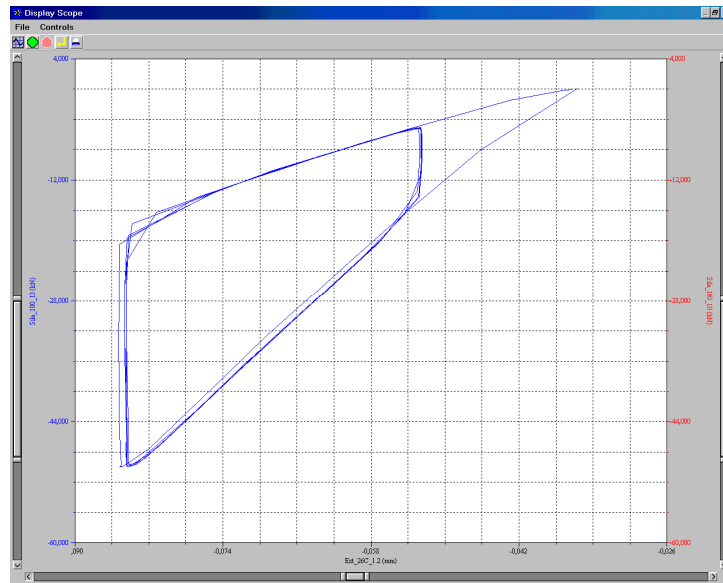


*Rys.4. Badany model: 1 - uchwyt dolny, 2 - uchwyt górny, 3 - wał, 4 - tuleja*  
*Fig.4. The experimental model: 1 – lower grip, 2 - upper grip, 3 - shaft, 4 - sleeve*

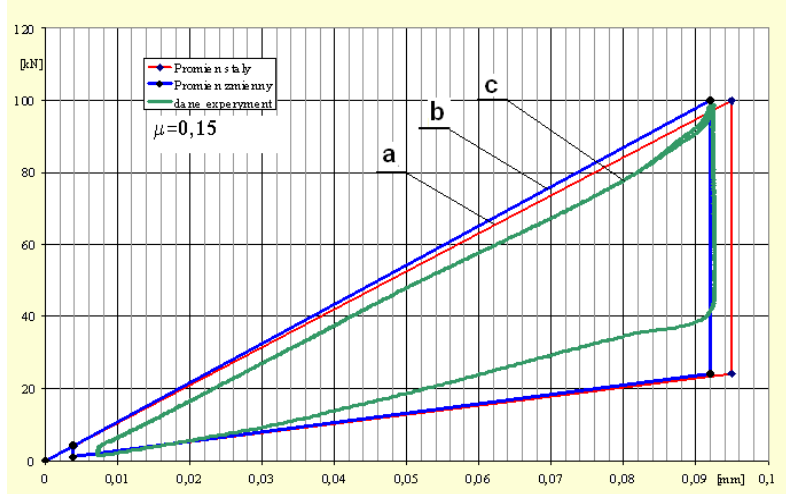


*Rys.5. Stanowisko badawcze: 1 – tuleja, 2 – wał, 3,4 – ekstensometr, 5 – górna tarcza dociskowa, 6 – dolna tarcza dociskowa, 7 – górna szczęką zaciskowa, 8 - dolna szczęką zaciskowa, 9 – element ustalający położenie górnej i dolnej tarczy dociskowej, 10 – sterownik.*

*Fig.5. The test stand: 1 – sleeve, 2 – shaft, 3,4 – ekstensometr, 5 –upperr pressure disk, 6 –lower pressure disk, 7 –upper gripping jaws, 8 – lower gripping jaws, 9 – steady pin to position the inner and outer of pressure plate, 10 – programmer*



Rys.6. Doświadczalna pętla histerezy przy 4 cyklach obciążeń  
 Fig.6. Experimental hysteresis loop at number of loading cycles: 4



Rys.7. Pętle histerezy modelu połączenia stożkowego: a) dla przypadku a), b) dla przypadku b), c) z doświadczeń,  
 Fig.7. Hysteresis loops of the model of a conical sleeve-shaft joint: a) for the case a), b) for the case b), c) for experiments



*Badanie analityczne i doświadczalne modelu  
połączenia ciernego tuleja –wał*

---

*Tabela 1. Zestawienie wyników rozpraszania energii badań symulacyjnych i eksperymentalnych*

*Table 1. The results of energy losses obtained from computational simulation and experimental testing*

<b>Model</b>	Pole pętli histerezy $\psi$ [Nm]	Przemieszczenie $u$ [mm]
a	0.003604	0.0950
<b>b</b>	0.003470	0.0920
c	0.002580	0.0921

## 6 Wnioski

Przyjęty model matematyczny stożkowego połączenia ciernego z elementami odkształcalnymi, umożliwia badanie zjawiska tarcia konstrukcyjnego występującego w połączeniu jako naturalnego źródła tłumienia drgań w układach mechanicznych. Wyprowadzone wzory stanowią podstawę do wykonania symulacji komputerowych, a następnie interpretacji wpływu parametrów geometrycznych i materiałowych na badany model układu mechanicznego. Z weryfikacji obszernych badań teoretycznych i doświadczalnych (przykład - rys.6, 7) wynika, że rezultaty badań są do siebie zbliżone dla obydwu sposobów określenia promienia stożka połączenia ciernego. Z inżynierskiego punktu widzenia wygodniej jest przyjąć promień stożka określony wzorem 1a. Uwzględnienie takiego wariantu lepiej przybliża bezpośrednio wyniki eksperymentalne przy jednocześnie prostszej formie opisu matematycznego wzór (9) (równania różniczkowego ze stałymi współczynnikami). W przypadku uwzględnienia zmiennego promienia stożka otrzymuje się równanie różniczkowe o zmiennych współczynnikach (wzory 13-14), którego rozwiązanie jest znacznie trudniejsze.

## Literatura

1. Dyląg Z., Jakubowicz A., Orłoś Z., *Wytrzymałość materiałów*, Tom I i II, WNT, Warszawa, 1996, 1997
2. Giergiel, J., *Tłumienie drgań mechanicznych*, PWN, Warszawa, 1990
3. Kosior A., Wpływ parametrów wybranych połączeń z tarciem konstrukcyjnym na właściwości sprężysto-tłumiące układów mechanicznych, *Pr. Nauk. PW, Mechanika*, z. 209, 2005
4. Osiński Z.: *Damping of Vibrations*, A. A. BALKEMA/ Rotterdam/ Brookfield/ 1998
5. Skup Z., *Zjawiska nieliniowe w tłumieniu drgań*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, 2010

## Streszczenie

Artykuł zawiera zagadnienie rozpraszania energii w połączeniu tuleja wał z uwzględnieniem tarcia konstrukcyjnego i zagadnienia Lamé'go.

Przedstawiono analizę i porównanie wyników uzyskanych metodą teoretyczną przez symulację cyfrową i badań eksperymentalnych przeprowadzonych na maszynie wytrzymałościowej MTS. Wyniki badań teoretycznych i doświadczalnych pozwalają na stwierdzenie, że przyjęty do analizy model matematyczny jest poprawny

**Słowa kluczowe:** tuleja-wał, zagadnienie Lamé'go rozpraszanie energii tarcie konstrukcyjne, pętla histerezy, badania doświadczalne

## **The analysis of the model of a conical sleeve-shaft joint with Lamé's problem taken into account**

The article presents the problem of energy dissipation in sleeve-shaft joints with structural friction and Lamé's problem taken into account. A comparative analysis was conducted to compare theoretical results obtained by means of the digital simulation method with the results of experimental research assisted by an MTS testing machine. This paper shows an outline of theoretical considerations, the method for conducting tests as well as selected comparative results.

**Keywords:** sleeve-shaft, Lamé's problem, energy dissipation, structural friction, hysteretic loop, experimental testing