

**Tomasz Janusz TELESZEWSKI**

**Anna Justyna WERNER-JUSZCZUK**

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok,

E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, a.juszczuk@pb.edu.pl

## **Symulacja przepływu cieczy doskonałej metodą brzegowych równań całkowych**

### 1 Wstęp

Ruch newtonowskiego płynu nielepkiego i nieściśliwego o stałej gęstości (ciecz doskonała), będący przedmiotem hydromechaniki klasycznej, pomimo istotnego uproszczenia modelu fizycznego płynu, jakim jest pominięcie lepkości i ściśliwości jest użytecznym modelem przepływu w wielu zagadnieniach technicznych.

W zagadnieniach dotyczących przepływu wody model cieczy doskonałej jest częstokroć dostatecznie dokładnym modelem fizycznym cieczy, pozwalającym przy tym na istotne uproszczenie matematycznego opisu przepływu [1].

Naturalną konsekwencją przyjęcia modelu cieczy doskonałej jest założenie potencjalności ruchu (ruch bezwirowy), przez co opis matematyczny ruchu można w ogólności sprowadzić do równania ciągłości i bezwirowości pola prędkości w postaci:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{c}) &= 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{c}) &= 0 \end{aligned} \right] \quad (1)$$

W przypadku przepływu płaskiego, będącego przedmiotem dalszych rozważań  $\vec{c} \equiv (c_x, c_y)$ , wobec czego równania (1) można zapisać w formie:

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{c}) &= \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{c}) &= \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = 0 \end{aligned} \right] \quad (2)$$

Wprowadzając funkcje potencjału prędkości  $\Phi(x, y)$  i potencjału prądu  $\Psi(x, y)$ , ( $c_x = \partial\Phi/\partial x = \partial\Psi/\partial y$ ;  $c_y = \partial\Phi/\partial y = -\partial\Psi/\partial x$ ;  $\Phi \equiv \Phi(x, y)$ ;  $\Psi \equiv \Psi(x, y)$ ) układ równań (2) sprowadza się do równań Laplace'a względem potencjałów ( $\Phi$ ) i ( $\Psi$ ):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{c}) &= \frac{\partial c_x}{\partial x} + \frac{\partial c_y}{\partial y} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \nabla^2\Phi = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{c}) &= \frac{\partial c_y}{\partial x} - \frac{\partial c_x}{\partial y} = \frac{\partial^2\Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Psi}{\partial y^2} = \nabla^2\Psi = 0 \end{aligned} \right] \quad (3)$$

Powyższe równania odpowiednio względem potencjałów ( $\Phi$ ) i ( $\Psi$ ) ze stosownymi warunkami brzegowymi wynikającymi z postulatu nieprzenikalności materialnego brzegu

ograniczającego pole przepływu można rozwiązać metodami siatkowymi takimi jak metoda różnic skończonych [2], metoda elementów skończonych [3] oraz metoda objętości skończonych [4]. Wszystkie wyżej wymienione metody obszarowe wymagają, w większości przypadków generowania pracochłonnych siatek, dlatego zagadnienia przepływu cieczy doskonalej rozwiązano metodą brzegowych równań całkowych [5].

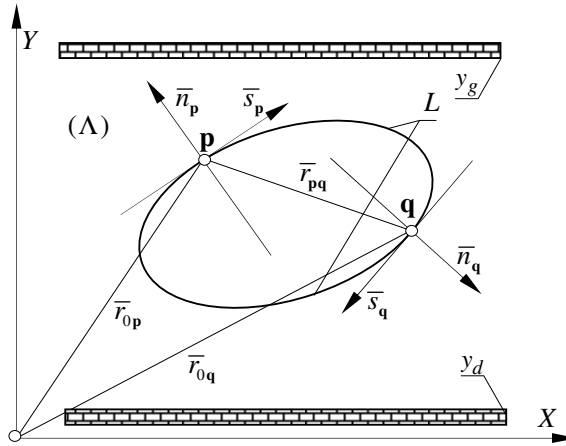
## 2 Brzegowe równanie całkowe opisując pole potencjału prądu płaskiego przepływu cieczy doskonalej

Pole prędkości bezwirowego płaskiego przepływu cieczy doskonalej opływającej płaski zamknięty kontur nieprzepuszczalny dla cieczy, bądź dowolny układ takich konturów, można traktować jako sumę pola prędkości przepływu jednorodnego (niezakłóconego) i pola prędkości przepływu wzbudzonego lokalizacją materialnego konturu, lub układu konturów, w przepływie jednorodnym. Z uwagi na warunek potencjalności przepływu i bezwirowości pola prędkości, będącego superpozycją obydwu pól prędkości, potencjału prądu przepływu jednorodnego  $\Psi_\infty(x, y)$  i przepływu wzbudzonego  $\Psi_z(x, y)$  spełniają równanie Laplace'a.

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi_\infty &= 0 \quad , \\ \nabla^2 \Psi_z &= 0 \quad , \end{aligned} \quad (4)$$

uzupełnione warunkiem brzegowym zerowej wartości potencjału prądu na konturze materialnym:

$$\frac{\partial \Psi_z(\mathbf{p})}{\partial \bar{n}_p} = \frac{\partial \Psi_\infty(\mathbf{p})}{\partial x} \bar{n}_{x,p} + \frac{\partial \Psi_\infty(\mathbf{p})}{\partial y} \bar{n}_{y,p} \quad (4a)$$



Rys. 1. Szkic obrazujący zagadnienia brzegowe w obszarze płaskim  
Fig. 1. Sketch to consideration of boundary conditions

Równanie całkowe opisujące przepływ płaski płynu cieczy doskonałej z warunkiem brzegowym (4a) w obszarze płaskim  $\Lambda$  ograniczonym zamkniętym brzegiem  $L$  (rys. 2) oraz ściankami o współrzędnych  $y_d$  oraz  $y_g$  ma postać:

$$\frac{1}{2}\mu(\mathbf{p}) + \int_{(L_q)} \mu(\mathbf{q}) \left( K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + K_d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + K_g(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dL_q = -\frac{\partial \Psi_\infty(\mathbf{p})}{\partial n} \quad (5)$$

$\mathbf{p} \subset L; \mathbf{q} \subset L$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_{xp} + (y_p - y_q)n_{yp}}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}, \\ K_d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_{xp} + (y_p - y_q + 2y_d)n_{yp}}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q + 2y_d)^2}, \\ K_g(\mathbf{p}, \mathbf{q}) &= \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_{xp} + (y_p - y_q + 2y_g)n_{yp}}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q + 2y_g)^2}, \end{aligned} \right\} \quad (5^*)$$

gdzie:  $n_{xp}, n_{yp}$  są wersorami normalnej zewnętrznej  $\bar{\mathbf{n}}_p$ , w punkcie  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(x_p, y_p) \subset L$  natomiast  $(y_g)$  i  $(y_d)$  oznaczają współrzędne  $(y)$  położenia ścianek ograniczających przepływ.

Prędkość styczną  $c_s$  na konturze wyznacza się bezpośrednio rozwiązując równanie całkowe (5) i jest ona równa lokalnej gęstości  $\mu(\mathbf{p})$  w punktach na  $\mathbf{p} \equiv \mathbf{p}(x_p, y_p) \subset L$  na brzegu ( $L$ ):

$$c_{sp} = \mu(\mathbf{p}) \quad (6)$$

Potencjał prądu  $\Psi_z(\mathbf{p})$  w obszarze ( $\Lambda$ ) można opisać równaniem całkowym [5,7]:

$$\Psi_z(\mathbf{p}) = \int_{(L)} \mu(\mathbf{q}) \left( E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + E_d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + E_g(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \right) dL_q + \Psi_\infty(\mathbf{p}) \quad (7)$$

$\mathbf{p} \subset \Lambda; \mathbf{q} \subset L$

gdzie:

$$E(p, q) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}} \right) \quad (7a)$$

$$E_d(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q + 2y_d)^2}} \right) \quad (7b)$$

$$E_g(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left( \frac{1}{\sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q + 2y_g)^2}} \right) \quad (7c)$$

Po wyznaczeniu potencjału prądu  $\Psi_z(\mathbf{p})$  składowe prędkości  $c_{zx}$  oraz  $c_{zy}$  można wyznaczyć z zależności:

$$\left. \begin{aligned} c_{zx}(\mathbf{p}) &= + \frac{\partial \Psi_z(\mathbf{p})}{\partial y} \\ c_{zy}(\mathbf{p}) &= - \frac{\partial \Psi_z(\mathbf{p})}{\partial x} \end{aligned} \right] \quad (8)$$

Po uwzględnieniu zależności (8) składowe prędkości w obszarze  $(\Lambda)$  można opisać równaniami:

$$c_x(\mathbf{p}) = \int_{(L)} \mu(\mathbf{q}) \left( \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} + \frac{\partial E_d(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} + \frac{\partial E_g(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} \right) dL_q + c_{\infty x}(\mathbf{p}) \quad (9a)$$

$$\mathbf{p} \subset \Lambda ; \mathbf{q} \subset L$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} &= \frac{1}{2\pi} \frac{y_p - y_q}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} \\ \frac{\partial E_d(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} &= \frac{1}{2\pi} \frac{y_p - y_q + 2y_d}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q + 2y_d)^2} \\ \frac{\partial E_g(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial y_p} &= \frac{1}{2\pi} \frac{y_p - y_q + 2y_g}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q + 2y_g)^2} \end{aligned} \right] \quad (9a^*)$$

oraz:

$$c_y(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} \mu(\mathbf{q}) \left( \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} + \frac{\partial E_d(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} + \frac{\partial E_g(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} \right) dL_q + c_{\infty y}(\mathbf{p}) \quad (9b)$$

$$\mathbf{p} \subset \Lambda ; \mathbf{q} \subset L$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} &= \frac{1}{2\pi} \frac{x_p - x_q}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2} \\ \frac{\partial E_d(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} &= \frac{1}{2\pi} \frac{x_p - x_q}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q + 2y_d)^2} \\ \frac{\partial E_g(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial x_p} &= \frac{1}{2\pi} \frac{x_p - x_q}{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q + 2y_g)^2} \end{aligned} \right] \quad (9b^*)$$

Prędkość wypadkowa jest sumą prędkości przepływu jednorodnego i przepływu wzbudzonego:

$$\begin{aligned}\bar{c} &= \bar{c}_\infty + \bar{c}_z \\ c &= \sqrt{(c_{\infty x} + c_{zx})^2 + (c_{\infty y} + c_{zy})^2}\end{aligned}\quad (10)$$

### 3 Walidacja metody elementów brzegowych w zagadnieniach płaskiego opływu obiektów cieczą doskonałą

W celu walidacji modelu obliczeniowego, rezultaty obliczeń MEB potencjału prądu i pola prędkości zostały porównane z rozwiązaniem analitycznym płaskiego opływu walca kołowego o promieniu ( $r$ ) w obszarze półnieskończonym nad ścianką równoległą do osi ( $X$ ) układu współrzędnych umieszczoną w odległości ( $b$ ) od osi walca. Rozwiązanie analityczne otrzymuje się superponując potencjały prądu dwóch źródeł podwójnych i przepływu jednorodnego z prędkością  $\bar{c}_\infty \equiv c_{\infty x}$  wzdłuż osi ( $X$ ) układu współrzędnych [8]:

$$\Psi = c_\infty y - \frac{c_\infty r^2 y}{x^2 + y^2} - \frac{c_\infty r^2 (y - 2b)}{x^2 + (y - 2b)^2}\quad (11)$$

Składowe prędkości  $c_x$  oraz  $c_y$  otrzymuje się w wyniku różniczkowania zależności (11) odpowiednio względem zmiennych  $x$  i  $y$ :

$$c_x = c_\infty - \frac{c_\infty r^2 (x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{c_\infty r^2 (x^2 - (y - 2b)^2)}{(x^2 + (y - 2b)^2)^2}\quad (12a)$$

$$c_y = c_\infty - \frac{2c_\infty r^2 xy}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2c_\infty r^2 x(y - 2b)}{(x^2 + (y - 2b)^2)^2}\quad (12b)$$

Prędkość wypadkowa przepływu jest równa:

$$c = \sqrt{c_x^2 + c_y^2}\quad (13)$$

W przypadku metody brzegowych równań całkowych brzeg podzielono na 16 elementów przyjmując stałą gęstość funkcji  $\mu(\mathbf{q})$ . Względne błędy obliczeń wartości potencjału prądu oraz wypadkowej prędkości wyznaczono z zależności:

$$\Delta\Psi_{MEB} = \left| \frac{\Psi_T - \Psi_{MEB}}{\Psi_T} \right| * 100\% \quad (14a)$$

gdzie:  $\Psi_{MEB}$  jest wartością potencjału prądu w obszarze przepływu wyznaczonego metodą brzegowych równań całkowych, natomiast  $\Psi_T$  jest wartością wyznaczoną z zależności analitycznej (11).

Analogicznie sformułowano szacunek błędu rozwiązania dla prędkości:

$$\Delta c_{MEB} = \left| \frac{c - c_{MEB}}{c} \right| * 100\% \quad (14b)$$

Błąd metody brzegowych równań całkowych wyznaczony dla potencjału prądu i prędkości w wybranych punktach przekroju  $y = \pm 1.5$  i nie przekroczył wartości 2 %.

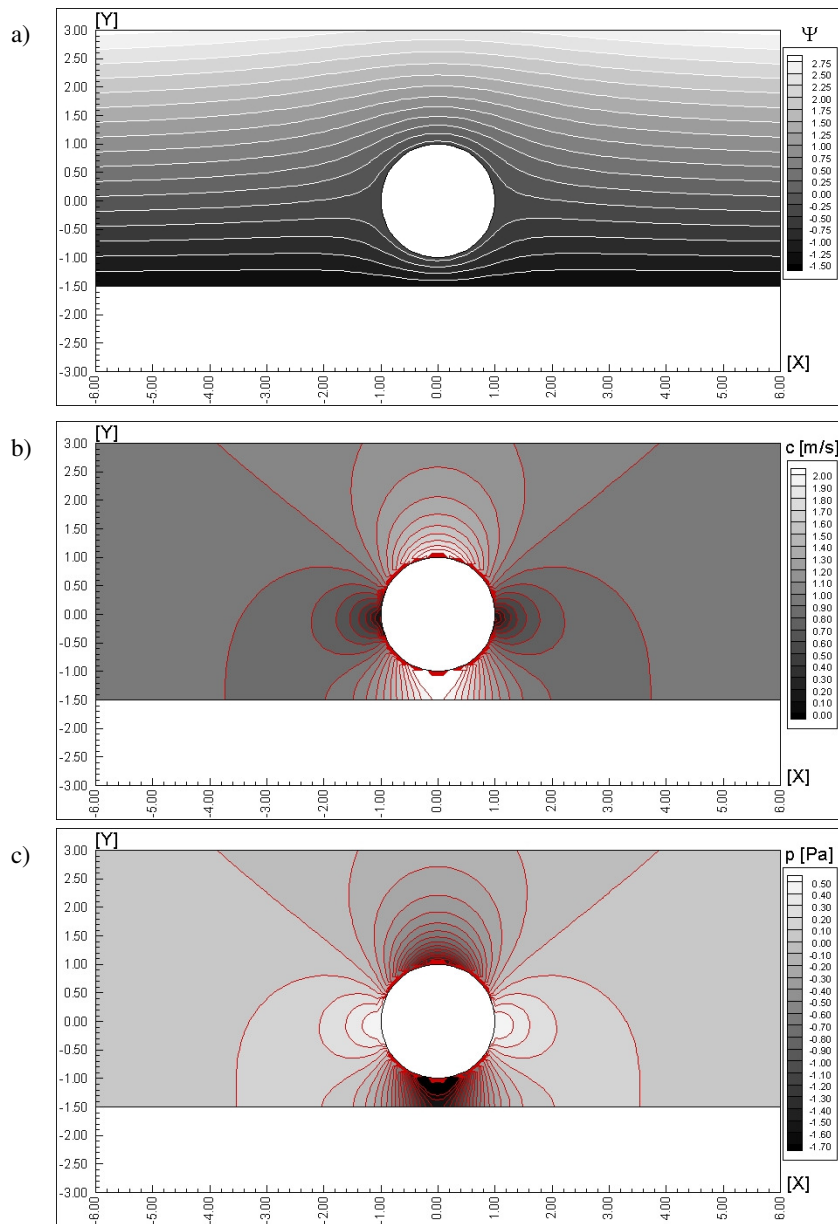
Tab. 1. Potencjał prądu oraz wypadkowa prędkości opływu okręgu nad ścianką - błąd rozwiązania BEM

Tab. 1. The streamlines and velocity of the flow over an circle above a solid plane wall – error analysis applied in BEM

Lp	Współrzędne obszaru $\Lambda$		Rozwiązanie analityczne	Rozwiązanie MEB 16 el.	Błąd metody MEB 16 el.	Rozwiązanie analityczne	Rozwiązanie MEB 16 el.	Błąd metody MEB 16 el.
	$X_p$ m	$Y_p$ m	$\Psi_T$ m <sup>2</sup> /s	$\Psi_{MEB}$ m <sup>2</sup> /s	$\Delta\Psi_{MEB}$ %	$C$ m/s	$C_{MEB}$ m/s	$\Delta C_{MEB}$ %
1	-1,500E+00	-1,500E+00	-1,500E+00	-1,507E+00	4,600E-01	1,000E+00	9,971E-01	2,910E-01
2	-1,000E+00	-1,500E+00	-1,500E+00	-1,498E+00	1,067E-01	1,237E+00	1,237E+00	0,000E+00
3	-5,000E-01	-1,500E+00	-1,500E+00	-1,483E+00	1,113E+00	1,640E+00	1,653E+00	7,744E-01
4	0,000E+00	-1,500E+00	-1,500E+00	-1,473E+00	1,820E+00	1,889E+00	1,913E+00	1,276E+00
5	-1,500E+00	1,500E+00	9,667E-01	9,510E-01	1,625E+00	1,065E+00	1,067E+00	1,972E-01
6	-1,000E+00	1,500E+00	8,267E-01	8,129E-01	1,670E+00	1,200E+00	1,200E+00	8,333E-03
7	-5,000E-01	1,500E+00	6,805E-01	6,702E-01	1,508E+00	1,390E+00	1,385E+00	4,171E-01
8	0,000E+00	1,500E+00	6,111E-01	6,036E-01	1,224E+00	1,494E+00	1,482E+00	7,632E-01

Na rysunkach 2 przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń metodą brzegowych równań całkowych. Rysunek 2a przedstawia linie prądu opływu walca nad ścianką, rysunek 2b pole prędkości, natomiast rysunek 2c rozkład ciśnienia wzbudzonego opływem kołowego profilu, wyznaczony z równania D. Bernoulliego przy założeniu jednostkowej gęstości cieczy i ciśnieniu odniesienia ( $p_0=0$ ).

*Symulacja przepływu cieczy doskonałej  
metodą brzegowych równań całkowych*

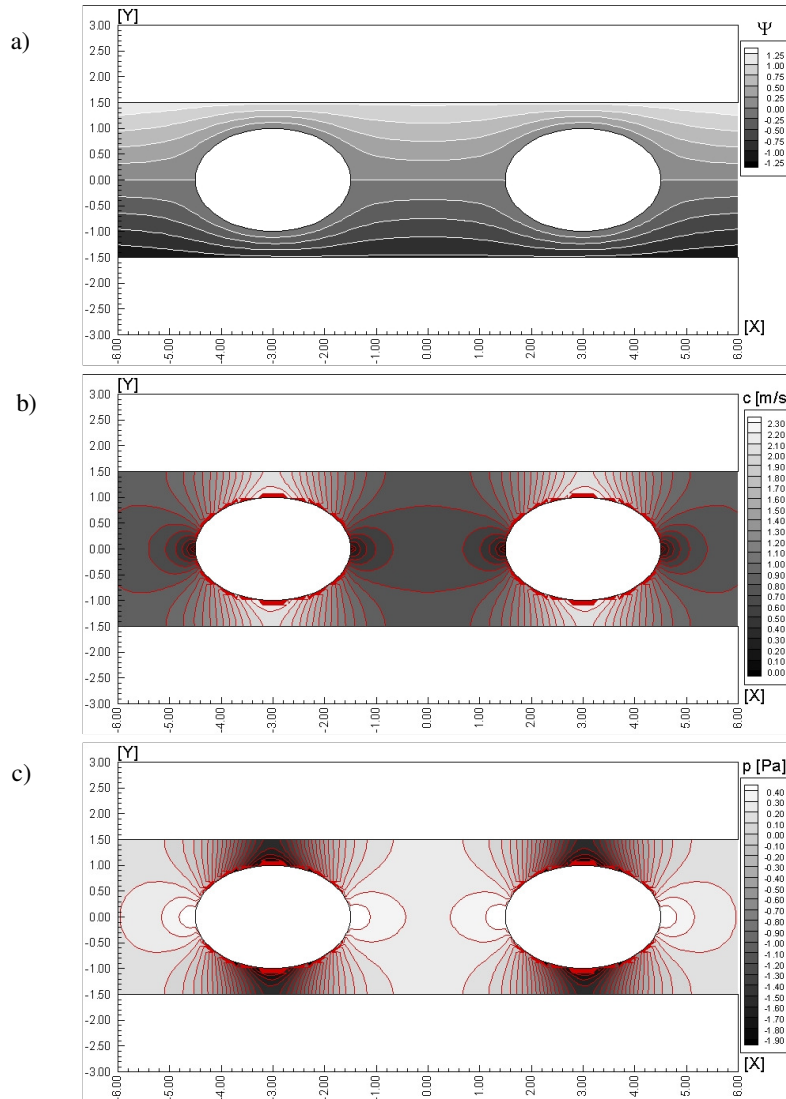


*Rys. 2. Potencjalny opływ okręgu nad ścianką, rozwiązanie numeryczne MEB:  
a) potencjał prądu, b) pole prędkości, c) rozkład ciśnienia*

*Fig. 2. Potential flow past circle above a solid plane wall, BEM solution : a) streamline function, b) velocity field, c) pressure field*

#### 4 Przykład obliczeniowy

Niżej przedstawiono wyniki rozwiązania zagadnienia opływu cieczą doskonałą dwóch eliptycznych profili w kanale między ściankami równoległymi.



Rys. 3. Potencjalny opływ dwóch eliptycznych profili między dwoma ściankami, rozwiązanie MEB: a) potencjał prądu, b) pole prędkości, c) rozkład ciśnienia

Fig. 3. Potential flow past two ellipses between a solid plane walls, BEM solution : a) streamline function, b) velocity field, c) pressure field



Do obliczeń przyjęto jednostkową prędkość przepływu niezakłóconego  $c_\infty$  oraz jednostkową gęstość cieczy  $\rho$ . Graficzne rezultaty obliczeń zostały przedstawione na rysunku 3. Na rysunku 3a wykreślono linie prądu, rysunek 3b przedstawia pole prędkości przepływu, natomiast rysunek 3c rozkład ciśnienia wzbudzonego opływem układu dwóch eliptycznych profili.

## 5 Podsumowanie

Przedstawiony algorytm opływu figur z zadanymi ściankami cieczą doskonałą metodą brzegowych równań całkowych jest narzędziem łatwym w implementacji, a także wydajnym. Niewątpliwie wadą prezentowanego wyżej algorytmu jest zawężenie symulacji do przepływów potencjalnych cieczą doskonałą, pomimo tego narzędzie to może być stosowane do wstępnej analizy szeregu zagadnień przepływowych.

Zastosowanie metody elementów brzegowych pozwala uniknąć wykonywania pracochłonnych siatek w porównaniu do metod obszarowych, jak również skraca czas wykonywanych obliczeń, ponieważ MEB redukuje o rząd wymiar rozwiązywalnych zagadnień.

## Literatura

1. Batchelor G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press 2000
2. Mitchell A.R.: *The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*. John Wiley&Sons Inc. 1980
3. Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Nithiarasu P.: *Finite Element Method for Fluid Dynamics 6th*. Ed. Butterworth Heinemann 2005
4. Versteeg H., Malalasekera W.: *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method*. Prentice Hall 2007
5. Piskorek A.: *Równania całkowe elementy teorii i zastosowania*. WNT 1997
6. Bisadze A.W. : *Równania fizyki matematycznej*. PWN 1984
7. Graebel W. P.: *Advanced Fluid Mechanics*. Elsevier 2007

## Streszczenie

W opracowaniu przedstawiono rozwiązanie zagadnienia opływu cieczą doskonałą konturów o dowolnym kształcie w płaskim obszarze ograniczonym materialnymi ściankami metodą elementów brzegowych. Błąd metody brzegowych równań całkowych został wyznaczony poprzez porównanie rezultatów MEB z wyprowadzonym rozwiązaniem analitycznym opływu okręgu nad ścianką. W pracy przedstawiono przykłady obliczeniowe. W celu wykonania symulacji sporządzono oryginalne oprogramowanie zagadnienia obliczeniowego w języku programowania Fortran.

## **Simulation of the perfect fluid flow by using Boundary Integral Equation Method**

### Summary

The paper propose the solution of the two-dimensional flows of perfect fluid through channels with parallel walls and with object arbitrary shape immersed inside by Boundary Integral Equation Method. The solution of problem was conducted with use of potential flow. Results of BEM simulation were compared with analytical results the streamlines and velocity of the potential flow over an circle above a solid plane wall. A numerical examples were presented. Analysis and simulation were conducted in Fortran Compiler.

*Projekt współfinansowany ze środków Unii Europejskiej  
w ramach Europejskiego Funduszu Społecznego  
(nr umowy WIEM/POKL/MD/II/2010/6).*