

Tomasz Janusz TELESZEWSKI

Sławomir Adam SORKO

Politechnika Białostocka, WBiIŚ, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok

E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl, s.sorko@pb.edu.pl

Konwekcja wymuszona w przepływie cieczy lepkiej przez przewody prostoosiowe

1 Wstęp

W wielu urządzeniach techniki cieplnej istotą działania jest wymiana ciepła pomiędzy płynem płynącym w systemie przewodów i ściankami przewodów. Przepływy przez układy rurowe tych urządzeń są generowane w szerokim zakresie form, poczynając od przepływów laminarnych, po przepływy turbulენტne o różnej skali turbulencji, natomiast wymiana ciepła jest traktowana jako przewodzenie ciepła pomiędzy substancją stałą ścianek przewodów (w przypadku przepływów prętowych przy niewielkiej różnicy temperatury obydwu struktur) lub wymianą ciepła w warunkach konwekcji wymuszonej w przestrzeni ograniczonej ściankami przewodów [1, 2]. Osobnym przypadkiem są urządzenia, w których mają miejsce przepływy z wymianą ciepła i zmianą fazy czynnika [3, 4] oraz przepływy z wymianą ciepła przez materiały i struktury rurowe porowate [5, 6, 7]. Zagadnienia przepływowo-ciepne są ze względu na swoją różnorodność niezwykle złożonymi zagadnieniami fizyki matematycznej i wymagają wielu różnorodnych sposobów matematycznego opisu przepływu masy i transferu ciepła

Niżej przeanalizowano zagadnienie przepływu laminarnego w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego przy przepływie płynu jednofazowego (cieczy) z wymianą ciepła w reżimie konwekcji wymuszonej.

2 Sformułowanie zagadnienia

W jednokierunkowym laminarnym przepływie przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego i stałych wymiarach przekroju składowa prędkości $u_z(x, y) \equiv u_z$ wzdłuż osi (z) przewodu jest stała w całym przekroju przewodu, natomiast składowe $u_x(x, y)$ i $u_y(x, y)$ są równe zero, zatem ruch cieczy lepkiej w przewodzie można opisać równaniem Stokesa w formie [8] (rys. 1):

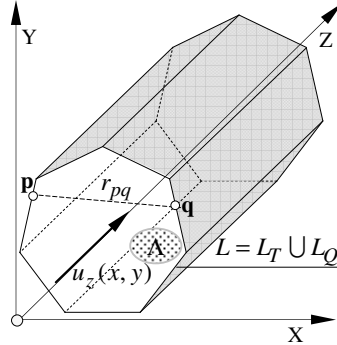
$$\nabla^2 u_z = \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) = -\frac{1}{\mu} \Delta P_z \quad ; \quad \Delta P_z = \frac{\partial p}{\partial z} = const, \quad (1a)$$

gdzie: p oznacza ciśnienie, μ jest współczynnikiem dynamicznej lepkości płynu.

Równanie energii, przy założeniu stałej gęstości strumienia ciepła wzdłuż osi przewodu $q_z = -\lambda \partial T / \partial z = \lambda \Delta T_z = const$, można opisać zależnością [8]:

$$\nabla^2 T = \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{\rho c_p}{\lambda} \Delta T_z u_z \quad ; \quad \Delta T_z = \frac{\partial T}{\partial z} = const \quad , \quad (1b)$$

gdzie: $T(x, y) \equiv T$ jest temperaturą, ρ gęstością cieczy, c_p ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu, natomiast λ współczynnikiem przewodzenia ciepła.



Rys. 1. Jednokierunkowy przepływ przez przewód prostoliniowy.

Szkic do analizy rozwiązania przepływu metodą elementów brzegowych

Fig. 1. Unidirectional flow through straight duct.

Sketch for analysis of the flow by means of boundary element method

Jedną z podstawowych charakterystyk cieplnych przepływu stanowi liczba kryterialna Nusselta (Nu), będąca odniesieniem konwekcyjnego transportu ciepła do kondukcyjnego transportu ciepła $Nu = \alpha L / \lambda$, gdzie α jest współczynnikiem przejmowania ciepła, λ współczynnikiem przewodzenia ciepła płynu, L wymiarem charakterystycznym w przepływie. W przypadku przepływu ograniczonego ściankami materialnymi (przepływy w przewodach całkowicie wypełnionych cieczą) liczbę Nusselta (średnią) opisuje się formułą:

$$Nu = \frac{q_s D_h}{\lambda (T_s - T_m)} \quad , \quad (2)$$

gdzie: D_h oznacza charakterystyczny wymiar geometryczny przepływu (definiowany jako iloraz pola przepływu i długości obwodu styku cieczy ze ścianką przewodu), $D_h = 4A/L$, q_s jest średnią wartością strumienia ciepła na ściance przewodu:

$$q_s = \frac{1}{L} \int_L q(\mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = \rho c_p \Delta T \iint_A u_z(\mathbf{v}) dA_{\mathbf{v}} \quad , \quad (2')$$

natomiast T_w i T_m oznaczają odpowiednio temperaturę przewodu i średnią masową temperaturę płynu:

$$T_m = \frac{1}{\Lambda u_m} \iint_{\Lambda} u_z(\mathbf{v}) T(\mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}}, \text{ gdzie: } u_m = \frac{1}{\Lambda} \iint_{\Lambda} u_z(\mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}}. \quad (2'')$$

W zagadnieniu wyznaczania parametrów przepływowych i cieplnych opisanych przedstawionymi wyżej równaniami różniczkowymi formułuje się stosowne warunki brzegowe. Dla równania opisującego pole prędkości (1) jest to postulat "braku poślizgu" płynu na ścianie wynikający z lepkości płynu $u_z(x, y)|_L = 0$, natomiast w przypadku równania opisującego rozkład temperatury w płynie (2) warunki brzegowe formułuje się w postaci: zadanego rozkładu temperatury $T(x, y)|_{L_T} = T_s(x, y)$ lub zadanego strumienia ciepła $q(x, y)|_{L_Q} = q_s(x, y)$ na ścianie przewodu.

3 Całkowe równania brzegowe opisujące pola prędkości i temperatury w laminarnym przepływie cieczy lepkiej przez przewód prostoosiowy

Całkując równanie (1a) w polu przekroju poprzecznego (Λ) i sprowadzając zagadnienie do zagadnienia brzegowego przy wykorzystaniu warunku określającego prędkość na ścianie przewodu jako równą zero ($u(\mathbf{p})|_{\mathbf{p} \in L} = 0$), otrzymuje się całkowe równanie brzegowe względem $u_z^*(\mathbf{q}) = \partial u_z(\mathbf{q}) / \partial n_{\mathbf{q}}$:

$$\chi(\mathbf{p}) u_z^*(\mathbf{p}) + \int_L \pi_z^*(\mathbf{q}) G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} = \frac{\Delta P}{\mu} \iint_{\Lambda} G(\mathbf{p}, \mathbf{w}) d\Lambda_{\mathbf{w}}; \quad (3)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L; \mathbf{w} \in \Lambda$

gdzie $\mathbf{p}(x_{\mathbf{p}}, y_{\mathbf{p}})$ i $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$ są odpowiednio punktem ustalonym i punktem bieżącym całkowania, a funkcje $G(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ i $E(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ są rozwiązaniami podstawowymi [9,10]:

$$G(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}} \right), \quad r_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| = \sqrt{(\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2 + (\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}})^2}, \quad (3^1)$$

$$H(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial G(\mathbf{p}, \mathbf{q})}{\partial n_{\mathbf{q}}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{y\mathbf{q}} + \delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} n_{x\mathbf{q}}}{r_{\mathbf{p}\mathbf{q}}^2}, \quad (3^2)$$

gdzie: $\delta x_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (x_{\mathbf{p}} - x_{\mathbf{q}})$; $\delta y_{\mathbf{p}\mathbf{q}} = (y_{\mathbf{p}} - y_{\mathbf{q}})$, $\mathbf{n}_{\mathbf{q}} = [n_{x\mathbf{q}}, n_{y\mathbf{q}}] = \left[\frac{\delta y_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}}, \frac{\delta x_{\mathbf{q}}}{\delta L_{\mathbf{q}}} \right]$, jest wektorem normalnym do granicy (L) w punkcie $\mathbf{q}(x_{\mathbf{q}}, y_{\mathbf{q}})$. Z uwagi na osobliwość funkcji w punkcie $\mathbf{q} \equiv \mathbf{p}$ całka po prawej stronie w równaniu (3) jest rozumiana w sensie wartości głównej Cauchy'ego, natomiast współczynnik $\chi(\mathbf{p})$ przy wydzielonej wartości $u_z^*(\mathbf{p})$ w punkcie osobliwym na gładkiej części brzegu (L) jest równy 1/2.

Po wyznaczeniu gradientu $u_z^*(\mathbf{q}) = \partial u_z(\mathbf{q}) / \partial n_{\mathbf{q}}$ na brzegu (L) prędkość w polu przekroju poprzecznego przewodu (A) w punktach ($\mathbf{v} \in A$) wyznacza się ze związku całkowego:

$$u_z(\mathbf{v}) = \int_L u_z^*(\mathbf{q}) G(\mathbf{v}, \mathbf{q}) dL_{\mathbf{q}} - \frac{\Delta P}{\mu} \iint_A G(\mathbf{v}, \mathbf{w}) dA_{\mathbf{w}} ; \quad (4)$$

$\mathbf{q} \in L ; \mathbf{v}, \mathbf{w} \in A$

Całkowe sformułowanie zagadnienia opisanego równaniem różniczkowym (1b) w polu (A), ograniczonym ciągłym brzegiem ($L = L_T \cup L_Q$) z fizycznymi warunkami brzegowymi opisującymi na części brzegu L_T jest zadaną temperaturę $T(\mathbf{p})|_{\mathbf{p} \in L_T} = T_s(\mathbf{p})$, a części brzegu L_Q zadany strumień ciepła $q(\mathbf{p})|_{\mathbf{p} \in L_Q} = q_s(\mathbf{p})$ prowadzi do równania całkowego:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_{L_Q} T(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \int_{L_T} T_s(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} = \\ \frac{1}{\lambda} \int_{L_T} q(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \frac{1}{\lambda} \int_{L_Q} q_s(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \frac{\rho c p}{\lambda} \Delta T \iint_A u(\mathbf{w})G(\mathbf{p}, \mathbf{w})dA_{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (5)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L ; \mathbf{v} \in A .$

Stosując warunek brzegowy zakładający zadaną wartość temperatury na ścianie przewodu $T(\mathbf{q}) = T_s(\mathbf{q}) ; \mathbf{q} \in L$ otrzymuje się równanie całkowe gęstości strumienia ciepła na brzegu obszaru:

$$\begin{aligned} \int_L q(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} = \chi(\mathbf{p})\lambda T_s(\mathbf{p}) + \lambda \int_L T_s(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \\ - \rho c p \Delta T \iint_A u(\mathbf{w})G(\mathbf{p}, \mathbf{w})dA_{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (5a)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L ; \mathbf{v} \in A$

Stosując warunek brzegowy zakładający zadaną gęstość strumienia ciepła na ścianie przewodu $q(\mathbf{q}) = q_s(\mathbf{q}) ; \mathbf{q} \in L$, otrzymuje się równanie całkowe gęstości strumienia ciepła na brzegu obszaru:

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_L T(\mathbf{q})H(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} = \frac{1}{\lambda} \int_L q_s(\mathbf{q})G(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \\ + \frac{\rho c p}{\lambda} \Delta T \iint_A u(\mathbf{w})G(\mathbf{p}, \mathbf{w})dA_{\mathbf{w}} \end{aligned} \quad (5b)$$

$\mathbf{p}, \mathbf{q} \in L ; \mathbf{v} \in A$

Po wyznaczeniu wartości brzegowych: temperatury $T(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p} \in L$ i strumienia ciepła $q(\mathbf{p}) \rightarrow \mathbf{p} \in L$ temperaturę w wewnętrznych punktach $\mathbf{v} \in A$ w obszarze A wyznacza się ze związku całkowego:

$$T(\mathbf{v}) = \int_L T(\mathbf{q})H(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \frac{1}{\lambda} \int_L q(\mathbf{q})G(\mathbf{v}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} - \frac{\rho c p}{\lambda} \Delta T \iint_A u(\mathbf{v})G(\mathbf{v}, \mathbf{w})dA_{\mathbf{w}} \quad (6)$$

$\mathbf{q} \in L; \mathbf{p}, \mathbf{v} \in A$

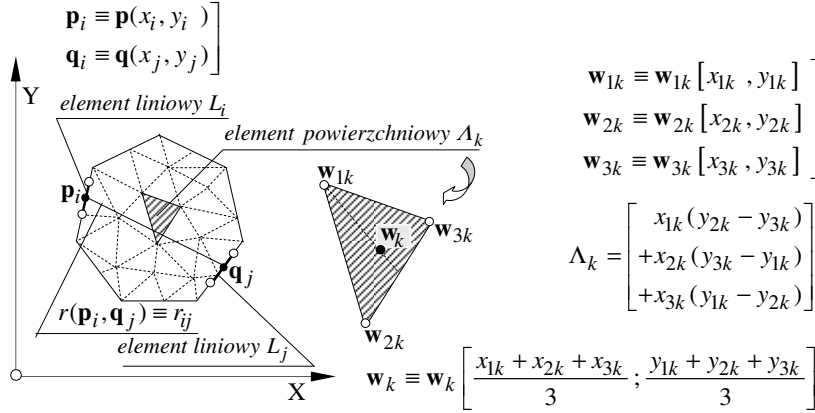
Gęstość strumienia ciepła wewnątrz przewodu można wyznaczyć przez zróżniczkowanie funkcji podcałkowych w związku całkowym (6):

$$q_x(\mathbf{v}) = -\lambda \left. \frac{\partial T(\mathbf{v})}{\partial x} \right|_{\mathbf{v}}, \quad q_y(\mathbf{v}) = -\lambda \left. \frac{\partial T(\mathbf{v})}{\partial y} \right|_{\mathbf{v}}; \quad q(\mathbf{v}) = \sqrt{(q_x(\mathbf{v}))^2 + (q_y(\mathbf{v}))^2}. \quad (7)$$

4 Numeryczne rozwiązanie całkowych równań brzegowych opisujących pola prędkości i temperatury w laminarnym przepływie cieczy lepkiej przez przewód prostoosiowy

Zagadnienie numerycznej rozwiązania przedstawionych wyżej równań całkowych (3) i (5), a w ich następstwie zależności (4) i (6) opisanych formułami całkowymi i związków (7) można zrealizować w ramach metody brzegowych równań całkowych wieloma schematami numerycznymi, zależnymi od sposobu i rodzaju przyjmowanych dyskretnych postaci elementów brzegowych [11,12].

Przyjmując, wedle najprostszej formuły, elementy liniowe dyskretyzujące linię brzegową (L) w liczbie (J) elementów ze stałą gęstością rozpatrywanych funkcji $u_z^*(\mathbf{q}_j)$ w równaniu (3) i $T(\mathbf{q}_j)$ w równaniu (5) oraz podział pola przepływu (A) na (K) trójkątów, przy założeniu, że wartości funkcji podcałkowych w obrębie elementów A_k są stałe, otrzymuje się odpowiednie układy algebraicznych równań liniowych względem wartości niewiadomej $u_z^*(\mathbf{q}_j) \Big|_{j=1, J}$:



Rys. 2. Jednokierunkowy przepływ przez przewód prostoliniowy.
 Dyskretyzacja linii brzojowej i obszaru przepływu w obliczeniach przy użyciu metody elementów brzojowych
 Fig. 2. Unidirectional flow through straight duct.
 Discretization of the boundary line and the region of the flow for solutions by means of the boundary element method

$$\sum_{j=1}^J u_z^*(\mathbf{q}_j) G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) L_j = \Delta P \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K G(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_k) \Lambda_k, \quad (8)$$

gdzie:

$$G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{ij}} \right) \quad i \neq j \quad ; \quad G(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \left[1 + \ln \left(\frac{2}{L_j} \right) \right] \quad i = j, \quad (8^*)$$

$$\text{przy czym: } r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}. \quad (8^{**})$$

Po wyznaczeniu gęstości funkcji $u_z^*(\mathbf{q}_j)_{j=1, J}$ w punktach $\mathbf{q}_j \equiv \mathbf{q}_j[x_{q_j}, y_{q_j}]_{j=1, J}$ będących centralnymi punktami elementów liniowych (L_j), prędkość $u_z(\mathbf{w}_k)$ w punktach $\mathbf{v}_l \equiv \mathbf{v}_l[x_{v_l}, y_{v_l}]_{l=1, L}$ w polu przepływu oraz w punktach kolokacji elementów powierzchniowych $\mathbf{w}_k \equiv \mathbf{w}_k[x_{w_k}, y_{w_k}]_{k=1, K}$ wyznacza się ze zdyskretyzowanego związku (4):

$$\left[u_z(\mathbf{w}_l) = \sum_{j=1}^J u_z^*(\mathbf{q}_j) G(\mathbf{w}_l, \mathbf{q}_j) L_j = \frac{\Delta P}{\mu} \sum_{k=1}^K G(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_l) \Lambda_k \right]_{l=1, L}. \quad (9)$$

W analogiczny sposób wykorzystując dokonany podział brzegu (L) na elementy liniowe $(L_j)_{j=1,J}$ i pola przepływu na elementy powierzchniowe $(A_k)_{k=1,K}$, równania całkowe (5a) i (5b) sprowadza się odpowiednio do układów algebraicznych równań liniowych względem zdyskretyzowanych niewiadomych: temperatury $T(\mathbf{q}_n)|_{n=1,N}$ i strumienia ciepła $q(\mathbf{q}_m)|_{m=1,M}$ na elementach na elementach L_n równoważnych elementom L_j przybliżającymi brzeg (L):

$$\sum_{j=1}^J q(\mathbf{q}_j) G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) L_j = \lambda \sum_{j=1}^J T_s(\mathbf{q}_j) H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) L_j + \rho c_p \Delta T \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K u(\mathbf{w}_k) G(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_k) A_k \quad (10a)$$

$$\sum_{j=1}^J T(\mathbf{q}_j) H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) L_j + \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^J q(\mathbf{q}_j) G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) L_j = + \frac{\rho c_p}{\lambda} \Delta T \sum_{j=1}^J \sum_{k=1}^K u(\mathbf{w}_k) G(\mathbf{q}_j, \mathbf{w}_k) A_k \quad (10b)$$

gdzie: $G(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j)$ jak w zależnościach (8*), (8**) oraz:

$$H(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_i - x_j)n_j^y - (y_i - y_j)n_j^x}{r_{ij}^2} \Big|_{i \neq j} \quad (10^*)$$

$$H(\mathbf{q}_j, \mathbf{q}_j) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^J E(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j) - 0.5 \Big|_{i=j} \quad (10^{**})$$

Po wyznaczeniu temperatury $T(\mathbf{p}_i)|_{i=1,I}$ i strumienia ciepła $q(\mathbf{p}_i)|_{i=1,I}$ w punktach $\mathbf{p}_i \equiv \mathbf{p}_i[x_{p_i}, y_{p_i}]_{i=1,I}$ na elementach brzegowych $\Sigma L_i \approx L$ temperaturę w polu przepływu w punktach $\mathbf{w}_l \equiv \mathbf{w}_l[x_{w_l}, y_{w_l}]_{l=1,L}$ wyznacza się z zależności:

$$\left[\begin{array}{l} T(\mathbf{w}_l) = \sum_{j=1}^J T(\mathbf{q}_j) H(\mathbf{w}_l, \mathbf{q}_j) L_j - \frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^J q(\mathbf{q}_j) G(\mathbf{w}_l, \mathbf{q}_j) L_j + \\ - \frac{\rho c_p}{\lambda} \Delta T \sum_{k=1}^K u(\mathbf{v}_k) G(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_l) A_k \end{array} \right]_{l=1,L} \quad (12)$$

Wyznaczone wyżej dyskretnie wartości prędkości przepływu i pola temperatury w przewodzie umożliwiają określenie lokalnej liczby Nusselta w warunkach

ustalonego, rozwiniętego przepływu laminarnego w przewodzie prostoosiowym z wymianą ciepła opisaną wyżej zależnością (2) w formie:

$$\text{Nu} = \frac{q_s D_h}{\lambda (T_s - T_m)} = \frac{D_h \rho c_p \Delta T \iint_{\Lambda} u_z(\mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}}}{\lambda \left(T_s - \frac{1}{\Lambda u_m} \iint_{\Lambda} u_z(\mathbf{v}) T(\mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}} \right)}, \quad (13)$$

gdzie: $u_m = \frac{1}{\Lambda} \iint_{\Lambda} u_z(\mathbf{v}) d\Lambda_{\mathbf{v}}$.

5 Weryfikacja metody obliczeniowej




W celu weryfikacji prezentowanego wyżej algorytmu wyznaczania przepływu laminarnego i wymiany ciepła w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego oraz bezwymiarowych charakterystyk tego typu przepływów porównano wyniki obliczeń analitycznych liczb Nusselta prezentowane w pracach [4], [13] dla przekrojów poprzecznych przewodów o kształcie kołowym, kwadratowym i trójkątnym z prezentowanym wyżej rozwiązaniem numerycznym metodą brzegowych równań całkowych, przy zachowaniu warunków geometrycznych przepływowych i cieplnych. Zestawienie przedstawiono w tabeli 1.

Tab. 1. Porównanie liczb Nusselta.

Dane dla przewodów o różnych kształtach przekroju [4] ; metoda MEB

Tab. 1. Compare Nusselt number.

Data for tubes of arbitrary schape [4] ; BEM solutions

kształt przekroju	wymiar charakt.	$T_s = const$		$q_s = const$	
		Nu _[4]	Nu _{MEB}	Nu _[4]	Nu _{MEB}
przekrój kołowy *)	 $D_h = D$	3.66	3.657	4.36	4.355
przekrój kwadratowy	 $D_h = D$	2.98	2.977	3.61	3.612
przekrój trójkątny	 $D_h = \frac{D}{\sqrt{3}}$	2.47	2.467	3.11	3.107

6 Przykład obliczeniowy

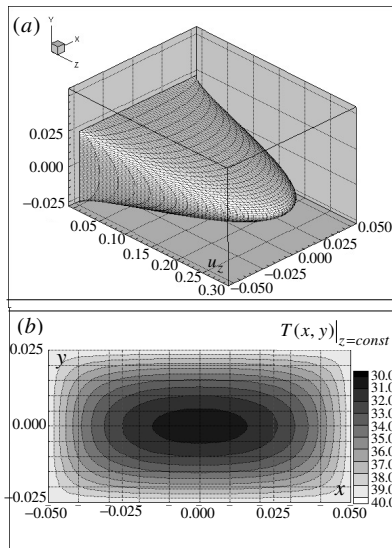
Przy użyciu prezentowanej wyżej metody brzegowych równań całkowych wyznaczono przepływ laminarny i charakterystyki cieplne w prostoosiowych przewodach o przekroju prostokątnym dla różnych proporcji wymiarów poprzecznych przewodu przy przepływie wody ($T_m = 30.0^\circ\text{C}$, $\rho_w = 995.7 \text{ kg/m}^3$, $\nu_w = 0.805 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$, $\mu_w = 801.5 \times 10^{-6} \text{ Ns/m}^2$, $c_{pw} = 4.174 \text{ kJ/(kg K)}$, $\lambda_w = 61.8 \times 10^{-2} \text{ W/(m K)}$,

*Konwekcja wymuszona w przepływie cieczy lepkiej
przez przewody prostoosiowe*

$\alpha = 14.9 \times 10^{-8} \text{ m}^2/\text{s}$, $\text{Pr} = \nu/\alpha = 5.42$) przy $\Delta P = 1000.00 \text{ s}^{-1} \text{ m}^{-1}$, $\Delta T = 10.0 \text{ K/m}$,
oraz: $q_s = 445.5 \text{ W/m}^2$, $T_s = 40.0 \text{ }^\circ\text{C}$.

Na rysunkach 3a, 3b przedstawiono odpowiednio profil prędkości przepływu i rozkład temperatury przy przepływie laminarnym w przewodzie prostoosiowym o przekroju prostokątnym (o wymiarach $a = 0.050 \text{ m}$, $b = 0.025 \text{ m}$), przy określonych wyżej wymuszeniach gradientu ciśnienia i temperatury wzdłuż osi przewodu.

W tabeli 2 zestawiono wartości liczb Nusselta przy przepływie cieczy o wyspecyfikowanych wyżej własnościach fizycznych i parametrach przepływu.



Rys. 3. (a) profil prędkości
(b) rozkład temperatury;
przewód prostoosiowy

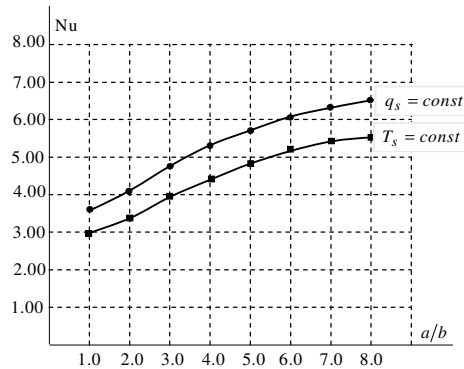
Fig. 3. (a) velocity profile
(b) temperature profile;
rectangular cross-section tube

Rys. 4. Przebieg liczby Nusselta
 $Nu = f(a/b)$ przekrój prostokątny
przepływ laminarny

Fig. 4. Nusselt number $Nu = f(a/b)$
of laminar flow through
rectangle cross-section pipe

Tab.2. Zestawienie liczb Nusselta
przewód o przekroju prostokątnym
Tab.2. Nusselt number
rectangle cross-section of the pipe

przekrój prostokątny a/b	wymiar charakt. D_h	Liczba Nusselta	
		$T_s = \text{const}$ Nu_{MEB}	$q_s = \text{const}$ Nu_{MEB}
1.0	$D_h = a$	2.978	3.605
2.0	$D_h = 4/3 a$	3.389	4.117
3.0	$D_h = 3/2 a$	3.957	4.787
4.0	$D_h = 8/5 a$	4.439	5.329
5.0	$D_h = 5/3 a$	4.789	5.688
6.0	$D_h = 12/7 a$	5.138	6.046
7.0	$D_h = 7/4 a$	5.367	6.266
8.0	$D_h = 16/9 a$	5.591	6.485



7 Podsumowanie

Przedstawiony w pracy algorytm jest efektywnym narzędziem modelowania zagadnień konwekcji wymuszonej przy przepływach laminarnych w przewodach prostoosiowych o różnych kształtach przekroju poprzecznego. Wyznaczenie właściwości przepływowych i wymiany ciepła w przewodach i układach przewodów o różnych kształtach przekroju poprzecznego i różnych relacjach wymiarów w obrębie jednego analizowanego kształtu ma istotne znaczenie jako element projektowania i optymalizacji konstrukcji układów przepływowych płytowych słonecznych wymienników ciepła i innych urządzeń przepływowo-ciepłnych, w których układy części wymiennikowej wykonuje się techniką zgrzewania profilowanych blach. Algorytm obliczeniowy może być z łatwością implementowany do obliczeń przepływów wielofazowych (przepływy korkowe i tłokowe)

Prezentowana wyżej metoda obliczeniowa, pomimo istotnych uproszczeń dotyczących charakteru przepływu i ograniczeń modelu przyjmowania ciepła, może być użytecznym narzędziem inżynierskim.

Obliczenia zagadnień przepływowych w zakresie przepływów newtonowskich cieczy lepkich są realizowane w Centrum Komputerowych Sieci Rozległych Politechniki Białostockiej na wieloprocesorowej maszynie wirtualnej (16xXSEON 2,4GHz, 16 GB RAM) przy wykorzystaniu oprogramowania sporządzonego w Politechnice Białostockiej (programy sporządzone przez autorów opracowania w języku programowania FORTRAN, modyfikowane i kompilowane w systemie maszyny wirtualnej)

Literatura

1. Burmeister L. C.: *Convective Heat Transfer*, Wiley, New York 1993
2. Kays W. M., Crawford M. E.: *Convective Heat and Mass Transfer*, McGraw-Hill, New York 1993
3. Bejan A., Nield D.: *Convection in Porous Media*, Springer-Verlag, New York 2001
4. Bejan A.: *Convection Heat Transfer*, Wiley, New York 2004
5. Spiga M., Morini G. L.: The Developing Nusselt Numbers for Slug Flow in Rectangular Ducts, *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 41, s. 2799–2807, 1998
6. Walsh E.J., Walsh P.A., Muzychka Y.S., Punch J., Egan V.: Pressure drop in two phase slug/bubble flows in mini scale capillaries, *International Journal of Multiphase Flow* vol. 35(10), s. 879–884, 2009
7. Walsh P., Walsh E. J., Muzychka Y. S.: Heat transfer model for gas–liquid slug flows under constant flux, *International Journal of Heat and Mass Transfer* vol. 53, s. 3193–3201, 2010
8. Landau L.D., Lifshitz E.M.: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987
9. Wrobel L.C.: *The Boundary Element Method. Vol 1. Application in Thermo-Fluids and Acoustics*. J. Wiley&sons, LTD NY 2001
10. Katsikadelis J.T.: *Boundary Elements. Theory and applications*. Elsevier SC, 2002
11. Kythe K. P.: *An Introduction to Boundary Element Methods*. CRC-Press 1995
12. Teleszewski T., Sorko S.A.: Wyznaczanie pola prędkości i strat energii w przepływie cieczy przez przewód prostoosiowy o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, *Kwartalnik Symulacja w Badaniach i Rozwoju* vol. 5, no. 2, 2014

13. Erdoğan M.E., Imrak C.E.: The effect of duct shape on the Nusselt number
Mathematical and Computational Applications vol. 10, No.1, 2005

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm MEB symulacji konwekcji wymuszonej przy przepływie w przewodach prostoosiowych o różnych od kołowego przekrojach poprzecznych przewodu. Weryfikacja metody elementów brzegowych została dokonana poprzez porównanie rezultatów obliczeń z rozwiązaniami analitycznymi i wynikami badań doświadczalnych. W pracy przedstawiono rezultaty numerycznej symulacji konwekcji wymuszonej w przewodach o prostokątnym przekroju poprzecznym, o zróżnicowanej relacji szerokości do wysokości przekroju poprzecznego przewodu. Wyznaczono wartości liczby Nusselta dla różnych relacji szerokość-wysokość kanału w warunkach przepływu laminarnego cieczy newtonowskiej.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, konwekcja wymuszona, przepływ laminarny przez przewody prostoosiowe

The forced convection in the flow of the viscous fluid through straight tubes

Summary

The paper presents the numerical algorithm of the Boundary Element Method employed to simulation and modelling forced convection in the cases of laminar flows through straight ducts of arbitrary cross section. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests in known solution. Were presented examples of the laminar flow with heat exchange of the forced convection in the straight tubes of rectangular cross-section of the various proportions the width-height of the channels. The Nusselt numbers for the analyzed flows were calculated by means proposed method.

Keywords: boundary element method, forced convection, slug flow, straight ducts

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/4/2014.