

Tomasz Janusz TELESZEWSKI
Politechnika Białostocka, WBiŚ
ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok
E-mail: t.teleszewski@pb.edu.pl

Algorytm MEB przejmowania ciepła w przepływie laminarnym przez przewody prostoosiowe

1 Wstęp

W wielu zagadnieniach przepływowo-ciepłnych wykorzystuje się przejmowanie ciepła przy przepływie laminarnym przez przewody prostoliniowe [1]. W pracy przedstawiono zastosowanie metody elementów brzegowych wyznaczania pola temperatury przepływu laminarnego w przewodach prostoosiowych przy stałej wzdłuż osi przewodu gęstości strumienia ciepła. Przepływ newtonowskiego płynu rzeczywistego jest opisany układem równań różniczkowych wynikających z zasady zachowania masy (1), momentu pędu (2) i energii (3) [2], [3]:

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{c}} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \frac{D\bar{\mathbf{c}}}{Dt} = -\nabla \bar{\varphi} + \mu \nabla^2 \bar{\mathbf{c}} \quad ; \quad \bar{\varphi} = \nabla p - \rho \bar{g}, \quad (2)$$

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \lambda \nabla^2 T + \mu \tau_{ij} \frac{\partial c_i}{\partial x_j}, \quad (3)$$

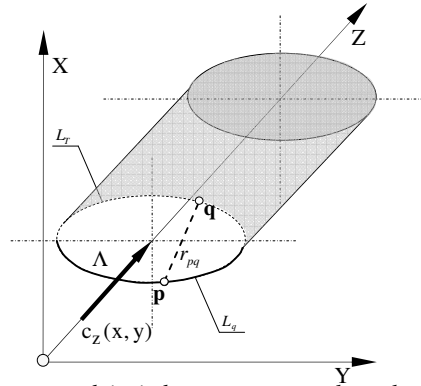
gdzie: $\bar{\mathbf{c}}$ oznacza prędkość przepływu, p ciśnienie, g – przyspieszenie ziemskie, ρ jest gęstością cieczy, μ jest współczynnikiem lepkości dynamicznej, c_p jest ciepłem właściwym przy stałym ciśnieniu, λ jest współczynnikiem przewodzenia ciepła, natomiast τ_{ij} jest lepkiem tensorem naprężeń.

W przypadku stacjonarnego, w pełni rozwiniętego laminarnego przepływu jednokierunkowego w przewodach prostoosiowych, gdzie składowe $c_x=0$, $c_y=0$, oraz przy stałej wzdłuż osi przewodu gęstości strumienia ciepła, równania (1-3) ulegają uproszczeniu (rys. 1):

$$\frac{\partial c_z}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$\mu \left(\frac{\partial^2 c_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_z}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial p}{\partial z} \quad ; \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad (5)$$

$$\lambda \nabla^2 T = \rho c_p \frac{\partial T}{\partial z} c_z. \quad (6)$$



Rys. 1. Szkic obrazujący zagadnienia brzegowe w przepływach przez kanały prostoliniowe

Fig. 1. Sketch to consideration of boundary conditions for duct flow

Równania różniczkowe (5-6) zostały rozwiązane metodą elementów brzegowych (MEB). W celu wykonania symulacji napisano w języku Fortran program obliczeniowy CONVECTIONinDUCT, w którym obliczenia wykonywane były dwuetapowo. W pierwszej kolejności wyznaczone zostało pole prędkości z równania (5), które jest warunkiem dla równania (6). W drugiej części programu w celu wyznaczenia pola temperatury rozwiązywane jest równanie (6).

2 Model przejmowania ciepła w przepływie laminarnym przez przewody prostoosiowe

W celu wyznaczenia pola prędkości w przekroju (Λ) równanie (5) zredukowano do równania Laplace'a przez dekompozycję składowej prędkości przepływu jednokierunkowego c_z na składową prędkości przepływu niezakłóconego c_∞ oraz składową prędkości przepływu wzbudzonego ściankami prostoliniowego kanału c_w [4, 5]:

$$\frac{\partial^2 c_w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_w}{\partial y^2} = 0 \quad ; \quad c_w(\mathbf{q}) = -c_\infty \quad ; \quad \mathbf{q} \in L, \quad (7)$$

gdzie:

$$c_\infty = \frac{1}{4} \wp (x_q^2 + y_q^2) \quad ; \quad \wp = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} < 0. \quad (7a)$$

Ostatecznie prędkość w przekroju kanału wyznacza się z zależności:

$$c_z = c_\infty + c_w. \quad (8)$$

Zakładając podział brzegu L zgodnie z kierunkiem wskazówek zegara w obszarze płaskim (Λ) przekroju przewodu prostoosiowego ograniczonym brzegiem (L), rozwiązaniem równania różniczkowego (5) jest następujące równanie całkowe (rys. 1) [4, 5]:

$$\frac{1}{2}c_w(\mathbf{p}) + \int_{(L)} g_w(\mathbf{q})K(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q = \int_{(L)} c_w(\mathbf{q})E(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q, \quad (9)$$

gdzie:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right); \quad r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}|; \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L, \quad (10a)$$

$$E(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_x + (y_p - y_q)n_y}{r_{pq}^2}; \quad (\mathbf{p}) \in L, (\mathbf{q}) \in L \quad (10b)$$

$$\begin{bmatrix} n_x, n_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta y_q \\ \delta L_q, -\delta x_q \\ \delta L_q \end{bmatrix}$$

gdzie: n_x oraz n_y są to wersory normalnej do brzegu (L).

Po wyznaczeniu gęstości $g_w(\mathbf{q})$ na linii brzegowej (L) prędkość c_z w dowolnym punkcie obszaru (Λ) wyznacza się z zależności:

$$c_z(\mathbf{p}) = - \int_{(L)} g_w(\mathbf{q})K(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q + \int_{(L)} c_w(\mathbf{q})E(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q + c_\infty(\mathbf{p}) \quad (11)$$

$(\mathbf{p}) \in \Lambda; (\mathbf{q}) \in L$

Zagadnienie brzegowe dla równania różniczkowego (6) formułuje się w postaci złożonego warunku brzegowego Dirichleta i Neumanna zakładającego znane wartości temperatury $\tilde{T}(\mathbf{q})$ na części brzegu L_T ($\mathbf{q} \in L_T$) i znane wartości strumienia ciepła $\tilde{q}(\mathbf{q})$ na części brzegu L_q ($\mathbf{q} \in L_q$) (Rys. 1). Wyznaczone pole $c_z(\mathbf{p})$ w obszarze (Λ) uwzględnia się w równaniu (6), którego rozwiązaniem jest następujące równanie całkowe:

$$\begin{aligned} & -\chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_{(L_q)} q(\mathbf{q})\mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q + \int_{(L_T)} T(\mathbf{q})\mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_T = \\ & = - \int_{(L_T)} \tilde{q}(\mathbf{q})\mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_T - \int_{(L_q)} \tilde{T}(\mathbf{q})\mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q + \rho c_p \iint_{\Lambda} c(\mathbf{q})\mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{v})d\Lambda, \end{aligned} \quad (12)$$

$(\mathbf{p}), (\mathbf{q}) \in L; (\mathbf{v}) \in \Lambda$

gdzie dla brzegu gładkiego $\chi(\mathbf{p})=1/2$ oraz:

$$\mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right); \quad r_{pq} = \sqrt{(x_p - x_q)^2 + (y_p - y_q)^2}, \quad (12a)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi} \frac{(x_p - x_q)n_x + (y_p - y_q)n_y}{r_{pq}^2}. \quad (12b)$$

Po wyznaczeniu $T(\mathbf{p})$ oraz $q(\mathbf{p})$ temperaturę w dowolnym punkcie ($\mathbf{p} \in \Lambda$) rozpatrywanego obszaru (Λ) wyznacza się ze związku całkowego:

$$T(\mathbf{p}) = \int_{(L)} T(\mathbf{q})\mathbf{E}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q + \int_{(L)} q(\mathbf{q})\mathbf{K}(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL_q - \rho c_p \iint_{\Lambda} c(\mathbf{q})\mathbf{K}(\mathbf{v}, \mathbf{q}) d\Lambda, \quad (13)$$

$$(\mathbf{q}) \in L ; (\mathbf{p}), (\mathbf{v}) \in \Lambda$$

3 Weryfikacja numerycznego modelu

Weryfikację przedstawionego algorytmu wykonano, porównując rozkład temperatury glikolu etylenowego ($\rho=1115.6[\text{kg}/\text{m}^3]$, $\nu=0.000019 [\text{m}^2/\text{s}]$, $C_p=2403.0[\text{J}/(\text{kgK})]$, $\lambda=0.2705[\text{W}/(\text{mK})]$, $\text{Re}=20$) przy przepływie laminarnym w rurze o przekroju kołowym, w której ścianki utrzymywane są w stałej temperaturze T_s [6]:

$$T_{TEO}(r) = T_s - \frac{\rho C_p c_{sr} R^2}{8\lambda} \left(3 - \frac{4r^2}{R^2} + \frac{r^4}{R^4} \right) \quad (14)$$

$$c_{sr} = \frac{R^2}{8\mu} \frac{dp}{dz} ; \quad \text{Re} = \frac{c_{sr} 2R}{\nu}$$

gdzie: c_{sr} jest to prędkość średnia w przewodzie kołowym, natomiast $R=0.005[\text{m}]$ oznacza promień przewodu, ν jest współczynnikiem lepkości kinematycznej, Re jest to liczba Reynoldsa, $T_s=20.0[^\circ\text{C}]$ jest zadaną temperaturą ścianki przewodu.

Błąd rozwiązania metody elementów brzegowych dla temperatury wyznaczono z zależności:

$$\delta T_{MEB} = \left| \frac{T_{TEO} - T_{MEB}}{T_{TEO}} \right| * 100\% , \quad (15)$$

gdzie: T_{MEB} jest to temperatura wyznaczona metodą elementów brzegowych, natomiast T_{TEO} jest rozwiązaniem teoretycznym (14) [6].

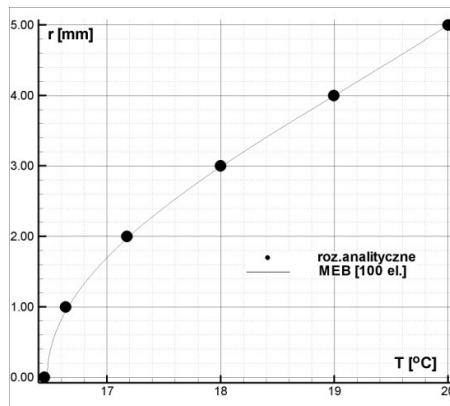
W tabeli 2 zestawiono błąd metody MEB dla brzegu składającego się z 50 i 100 liniowych elementów. Maksymalny błąd metody MEB dla brzegu składającego się z 50 liniowych elementów nie przekracza 0.05 [%], natomiast dla brzegu zbudowanego z 100 elementów błąd MEB nie przekracza 0.02 [%]. Zagęszczenie podziału linii brzegowej konturu przekroju przewodu prostoliniowego powoduje zmniejszenie błędu metody MEB. Graficzne rezultaty porównania zostały przedstawione na rysunku 2.

*Algorytm MEB przejmowania ciepła w przepływie laminarnym
przez przewody prostoosiowe*

Tab. 1. Temperatura przy przepływie laminarnym glikolu etylenowego w przewodzie okrągłym - błąd rozwiązania MEB

Tab. 1. The temperature distribution in a ethylene glycol moving in laminar flow in a pipe with circular cross section - error analysis applied in BEM

Lp.	Współrz. węzłów	Roz. teoretyczne	Roz. num. MEB 50	Błąd metody MEB 50	Roz. num. MEB 100	Błąd metody MEB 100
-	r [m]	T _{TEO} [°C]	T _{BEM} [°C]	δT _{BEM} [%]	T _{BEM} [°C]	δT _{BEM} [%]
1	0,0E+00	1,6447E+01	1,6455E+01	4,4882E-02	1,6449E+01	1,0483E-02
2	1,0E-03	1,6635E+01	1,6642E+01	4,4367E-02	1,6637E+01	1,0355E-02
3	2,0E-03	1,7175E+01	1,7182E+01	4,2944E-02	1,7177E+01	1,0002E-02
4	3,0E-03	1,7999E+01	1,8006E+01	4,0925E-02	1,8001E+01	9,4905E-03
5	4,0E-03	1,8994E+01	1,9001E+01	3,8696E-02	1,8996E+01	8,9076E-03
6	5,0E-03	2,0000E+01	2,0000E+01	0,0000E+00	2,0000E+01	0,0000E+00



Rys. 2. Porównanie rezultatów obliczeń MEB z rozwiązaniem teoretycznym (14) [6]

Fig. 2. Compare BEM results with theoretical solution - (14) [6]

4 Przykłady obliczeniowe

W przykładzie obliczeniowym programu CONVECTIONinDUCT przyjęto przepływ laminarny glikolu etylenowego ($\mu=0.021329[\text{Pa s}]$, $\rho=1115.6[\text{kg/m}^3]$, $\lambda=0.2705[\text{W}/(\text{m}\cdot\text{K})$, $C_p=2403.0[\text{J}/(\text{kg K})$, $Re=30$) w przewodzie o przekroju zadanym krzywą Lamego ($n=4$, $a=5.0 [\text{mm}]$, $b=5.0 [\text{mm}]$):

$$\left| \frac{x}{a} \right|^n + \left| \frac{y}{b} \right|^n = 1 \cdot \quad (16)$$

Obliczenia wykonano dla dwóch wariantów. W wariantcie I założono warunek brzegowy Dirichleta $\tilde{T}(\mathbf{q}) = T_s = 20.0[^\circ\text{C}]$ ($\mathbf{q} \in L_T$), natomiast w wariantcie II przyjęto warunek brzegowy Neumanna $\tilde{q}(\mathbf{q}) = q_w = 384.4[\text{W/m}^2]$ ($\mathbf{q} \in L_q$).

Liczba Nusselta została wyznaczona z następującego wzoru [7]:

$$Nu = \frac{q_w D_h}{\lambda(T_w - T_m)} ; \quad D_h = \frac{4\Lambda}{L} , \quad (17)$$

gdzie: D_h jest średnicą hydrauliczną, L jest obwodem przewodu, Λ jest polem powierzchni przewodu, natomiast średnia masowa temperatura płynu T_m określona jest następującą zależnością [7]:

$$T_m = \frac{1}{\Lambda c_{sr}} \int_{\Lambda} c T d\Lambda , \quad (18)$$

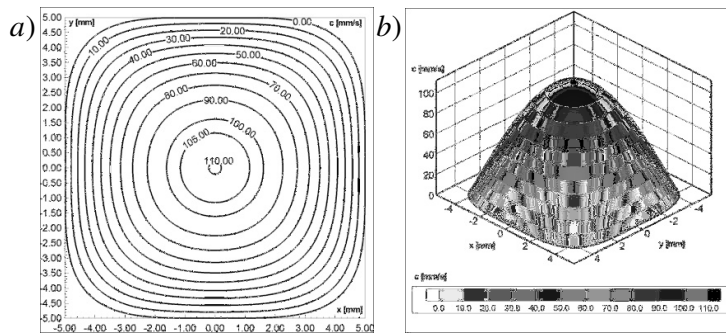
gdzie c_{sr} jest to średnia prędkość przepływu w kanale, wyznaczona z pola prędkości.

Liczba Nusselta dla warunku Dirichleta (wariant I) wyniosła $Nu=4.22$, natomiast dla warunku Neumanna (wariant II) równa jest $Nu= 4.07$.

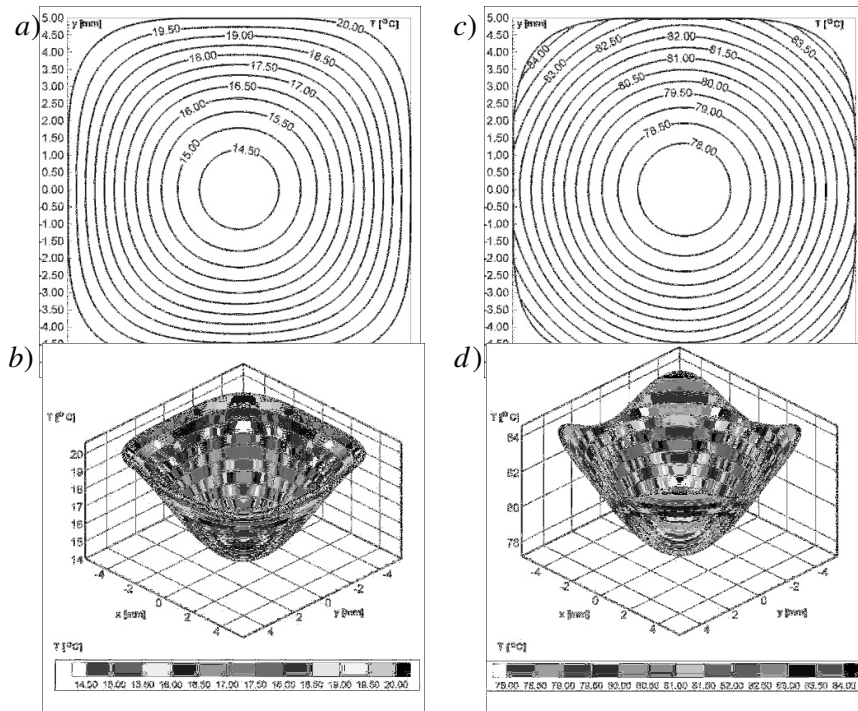
Na rysunkach 3a-b wykreślono izotachy oraz pole prędkości wyznaczone metodą elementów brzegowych.

Rysunki 4a-b przedstawiają izotermy oraz pole temperatury dla wariantu I (warunek brzegowy Dirichleta), natomiast na rysunkach 4c-d wykreślono izotermy oraz pole temperatury dla wariantu II (warunek brzegowy Neumanna).

Symulacje wykonano dla brzegu podzielonego na 1000 liniowych elementów.



Rys. 3. Pole prędkości w przewodzie prostoosiowym o przekroju superelipsy wyznaczone metodą MEB (glikol etylenowy, $Re=30$): a) izotachy, b) pole prędkości, widok 3D
 Fig.3. Velocity in superellipse duct (ethylene glycol, $Re=30$) - BEM solution:
 a) isotachs, b) velocity field 3D



Rys. 4. Pole temperatury w przewodzie prostoosiowym o przekroju superelipsy wyznaczone metodą MEB (glikol etylenowy, $Re=30$) a) izotermy (wariant I), b) pole temperatury, widok 3D (wariant I), c) izotermy (wariant II), b) pole temperatury, widok 3D (wariant II)

Fig.4. The temperature distribution in superellipse duct (ethylene glycol, $Re=30$) - BEM solution: a) isotherm (variant I - Dirichlet conditions), b) temperature field 3D (variant I - Dirichlet conditions), c) isotherm (variant II - Neumann conditions), d) temperature field 3D (variant II - Neumann conditions)

5 Podsumowanie

Przedstawiony algorytm metody elementów brzegowych przejmowania ciepła w przewodach prostoosiowych w przepływie laminarnym niezależnie od kształtu przekroju kanału jest alternatywą wobec najczęściej stosowanych metod siatkowych, takich jak metoda elementów skończonych, metoda objętości skończonych czy najlepiej ugruntowana teoretycznie metoda różnic skończonych. Główne zalety wyprowadzonego algorytmu to brak przestrzennych siatek oraz mniejsze zapotrzebowania na moc obliczeniową w porównaniu z metodami obszarowymi. Algorytm może być wykorzystany zarówno do wyznaczania pól prędkości i rozkładów temperatur w przewodach prostoosiowych, jak i do wyznaczania liczb kryterialnych, np. liczby Nusselta. Mały błąd metody elementów brzegowych w stosunku do rozwiązania analitycznego świadczy o dużej dokładności MEB.

Literatura

1. Kakac S., Liu H.: *Heat exchangers selection, rating, and thermal design*, Second Edition, CRC Press, 2002
2. Landau L.D., Lifshitz E.M.: *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, 1987
3. Batchelor G.K.: *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge University Press, 2000
4. Teleszewski T.J., Sorko S.A.: Zastosowanie metody elementów brzegowych do wyznaczania jednokierunkowego przepływu w przewodach prostoosiowych o dowolnym kształcie przekroju poprzecznego, *Acta Mechanica et Automatica*, vol.5, nr 3, p. 124-132, 2011
5. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary element Techniques. Theory and Applications in Engineering*. Springer-Verlag, NY, 1984
6. White F.M.: *Viscous Fluid Flow*, Third Edition McGraw-Hill Mechanical Engineering, 2005
7. Wiśniewski S., Wiśniewski T. S.: *Wymiana ciepła*, WNT, 2012

Streszczenie

W pracy przedstawiono algorytm metody elementów brzegowych przejmowania ciepła w przepływie laminarnym przez przewody prostoosiowe niezależnie od kształtu konturu przewodu. Weryfikacja metody elementów brzegowych została wykonana poprzez porównanie rezultatów obliczeń MEB ze znanym rozwiązaniem analitycznym opisującym przejmowanie ciepła w przewodzie o przekroju kołowym. W publikacji przedstawiono graficzne rezultaty obliczeń dla przejmowania ciepła przepływu laminarnego w kanale, którego kształt zadany jest krzywą Lamego. Algorytm został zaimplementowany w programie obliczeniowym CONVECTIONinDUCT napisanym w języku Fortran.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, przejmowanie ciepła w przewodach

Modelling of forced convection a Boundary Element Method in a duct with arbitrary cross-section with uniform heat flux

Summary

The paper presents the numerical application Boundary Element Method to modelling the velocity field and the temperature distribution of forced convection a Boundary Element Method in a duct with arbitrary. The efficiency and the credibility of proposed algorithm were verified by numerical tests in asymptotic uniform heat-flux in circular pipe. A numerical examples are presented fully developed forced convection through superellipse duct. The computer program CONVECTIONinDUCT was written in Fortran programming languages.

Keywords: boundary element method, forced convection, circular pipe

Opracowanie zrealizowano w ramach pracy statutowej nr S/WBiŚ/5/2011.

Indeks

Andrzejewski Maciej	91	Sorko Sławomir Adam	41
Borowicz Adam	123	Stanik Jerzy	23
Dyk Michał	203	Szyfman Urszula	99
Dzida Damian	5	Tabędzki Marek	109
Furmanik Kazimierz	69	Teleszewski Tomasz Janusz	41, 213, 221
Karbowska-Chilińska Joanna	81	Tomaszewski Karol	51
Korczak Sebastian	193	Topczewska Magdalena	99
Koszelew Jolanta	133	Wesołowski Zbigniew	59
Kumaniecka Anna	143	Zabielski Paweł	81
Maciak Tadeusz	153		
Markowski Adam	5		
Marzewski Rafał	153		
Merkisz Jerzy	91		
Najgebauer Andrzej	203		
Nowak Radosław	185		
Orszulak Bartosz	91		
Pierzchała Dariusz	203		
Pietrzakowski Marek	185		
Prącik Michał	69, 143, 171		
Protasowicki Tomasz	23		

Recenzenci vol. 4/2013

Prof. nzw. dr hab. inż. Ryszard Antkiewicz
Prof. dr hab. inż. Roman Bogacz
Prof. nzw. dr hab. inż. Wojciech Feluch
Prof. nzw. dr hab. inż. Andrzej Grzyb
Dr inż. Rafał Kasprzyk
Prof. nzw. dr hab. inż. Romuald Kotowski
Dr Jarosław Łazuka
Dr inż. Piotr Marciniak
Dr Robert Milewski
Prof. nzw. dr hab. inż. Andrzej Najgebauer
Prof. nzw. dr hab. inż. Tadeusz Nowicki
Dr inż. Jarosław Olejniczak
Prof. dr. hab. inż. Alexander Petrovsky
Dr inż. Dariusz Pierzchała
Prof. nzw. dr hab. inż. Marek Pietrzakowski
Dr inż. Wiesław Półjanowicz
Prof. nzw. dr hab. inż. Waldemar Rakowski
Dr inż. Jarosław Rulka
Prof. nzw. dr hab. inż. Sławomir Adam Sorko
Dr inż. Wojciech Stecz
Prof. nzw. dr hab. inż. Zbigniew Tarapata
Prof. dr hab. inż. Andrzej Tylikowski
Prof. dr hab. inż. Andrzej Walczak
Dr inż. Robert Waszkowski
Prof. nzw. dr hab. inż. Kazimierz Worwa