

Piotr RYNKOWSKI

Politechnika Białostocka, Wydział Budownictwa i Inżynierii Środowiska,
Katedra Ciepłownictwa, ul. Wiejska 45E, 15-351 Białystok
E-mail: p.rynkowski@pb.edu.pl

Dokładność rozwiązania w konwencjonalnej oraz szybkiej wielobiegunowej metodzie elementów brzegowych

1 Wprowadzenie

Metoda elementów brzegowych (MEB), obok metod siatkowych: różnic i elementów skończonych, jest jedną z efektywnych metod numerycznych rozwiązywania zagadnień inżynierskich oraz należy do najbardziej znanych metod rozwiązania całkowego równania brzegowego w zagadnieniach inżynierskich. Obliczenia numeryczne wykonane przy użyciu Metody Elementów Brzegowych pozwalają na zmniejszenie wymiaru układu równań, opisujących analizowane zagadnienie o jeden rząd wielkości, w stosunku do metod siatkowych. Jest to niewątpliwie zaleta metody. Jednak mimo tej powszechnie znanej zalety metody elementów brzegowych nie doczekała ona się dotąd powszechnie tylu zastosowań komercyjnych jak metody siatkowe.

Do wad MEB możemy zaliczyć konieczność znajomości tzw. rozwiązania podstawowego (ang.: *fundamental solution*) oraz pełne i niesymetryczne macierze współczynników układu równań algebraicznych. Obliczenie elementów macierzy wymaga wykonania $N \times N$ operacji, gdzie N jest to liczba stopni swobody układu równań. Dla dużych układów MEB może być nieefektywna. W celu uniknięcia wymienionej wady w wyniku rozwoju konwencjonalnej metody elementów brzegowych pojawiły metody minimalizujące złożoność obliczeniową. Jedną z najbardziej popularnych metod jest szybka wielobiegunowa metoda (ang.: *fast multiple method* FMM).

Celem opracowania jest próba porównania i przedstawienia dokładności rozwiązania numerycznego dla konwencjonalnej MEB oraz szybkiej wielobiegunowej metody elementów brzegowych, przy różnym stopniu dyskretyzacji obszaru (konwencjonalna MEB i FMM).

2 Brzegowe równania całkowite opisujące ustalone przewodzenie ciepła w przestrzeni dwuwymiarowej

Przy założeniu, że w płaskim obszarze (Λ) ograniczonym zamkniętą krzywą (L) na części powierzchni są zadane wartości temperatury opisane warunkiem brzegowym (1a), natomiast na części powierzchni są zadane wartości strumienia ciepła opisane warunkiem brzegowym (1b), całkowite równanie opisujące ustalone pole temperatury na brzegu obszaru ma postać (2):

$$T(\mathbf{v})|_{\mathbf{v}=\mathbf{p}} = T_L(\mathbf{p}) \quad ; \quad (\mathbf{p}) \in (L), (\mathbf{v}) \in (\Lambda), \quad (1a)$$

$$\lambda \frac{\partial T(\mathbf{v})}{\partial \bar{n}_v} \Big|_{\mathbf{v}=\mathbf{p}} = q_L(\mathbf{p}) \quad ; \quad (\mathbf{p}) \in (L), (\mathbf{v}) \in (\Lambda), \quad (1b)$$

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{p})T(\mathbf{p}) + \int_{L_T} T(\mathbf{q})K_Q(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q + \int_{L_Q} q(\mathbf{q})K_T(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q = \\ = \tilde{T}_L(\mathbf{p}) + \tilde{q}_L(\mathbf{p}) + \tilde{q}_v(\mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2)$$

gdzie jądra całkowe (rozwiązania podstawowe) mają postać:

$$K_T(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left(\frac{1}{r_{pq}} \right) \quad ; \quad r_{pq} = |\mathbf{p} - \mathbf{q}| \quad ; \quad (\mathbf{p}) \in (L), (\mathbf{q}) \in (L) \quad (3a)$$

$$K_Q(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \frac{\partial (K_T(\mathbf{p}, \mathbf{q}))}{\partial n_p} = \frac{1}{2\pi} \frac{d_{pq}}{r_{pq}^2}; \quad (\mathbf{p}) \in (L), (\mathbf{q}) \in (L) \quad (3b)$$

$$d_{pq} = \sum_{\delta=1}^2 (p_\delta - q_\delta) \cdot \bar{n}_\delta \quad (3c)$$

oraz:

$$\tilde{T}_L(\mathbf{p}) = \int_{L_T} T_L(\mathbf{q})K_Q(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q \quad (3d)$$

$$\tilde{q}_L(\mathbf{p}) = \int_{L_Q} q_L(\mathbf{q})K_T(\mathbf{p}, \mathbf{q})dL_q \quad (3e)$$

$$\tilde{q}_v(\mathbf{p}) = \iint_{\Lambda} q_v(\mathbf{v})K_T(\mathbf{p}, \mathbf{v})d\Lambda_v \quad (3f)$$

$$K_T(\mathbf{p}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2\pi\lambda} \ln \left(\frac{1}{r_{pv}} \right); \quad r_{pv} = |\mathbf{p} - \mathbf{v}|; \quad (\mathbf{p}) \in (L), (\mathbf{v}) \in (\Lambda) \quad (3g)$$

Współczynnik $\chi(\mathbf{p})$ jest zależny od krzywizny krzywej (L) i dla gładkiego fragmentu brzegu jest równy $\chi(\mathbf{p}) = 1/2$.

Gdy brak jest wewnętrznych źródeł ciepła, równanie całkowe (2) można zapisać w postaci macierzowej:

$$\mathbf{H} \mathbf{U} = \mathbf{G} \mathbf{T}, \quad (4)$$

gdzie macierze H i G zależą od rozwiązania podstawowego i funkcji brzegowych, natomiast wektory macierzy U i T są to wartości strumieni ciepłych i temperatury.

Po wyznaczeniu niewiadomych wartości $T(\mathbf{p})$ i $q(\mathbf{p})$ odpowiednio na częściach linii brzegowej po rozwiązaniu równania całkowego (2) temperaturę $T(\mathbf{u})$ w dowolnym punkcie (\mathbf{u}) obszaru płaskiego (Λ) można wyznaczyć ze związku (5):

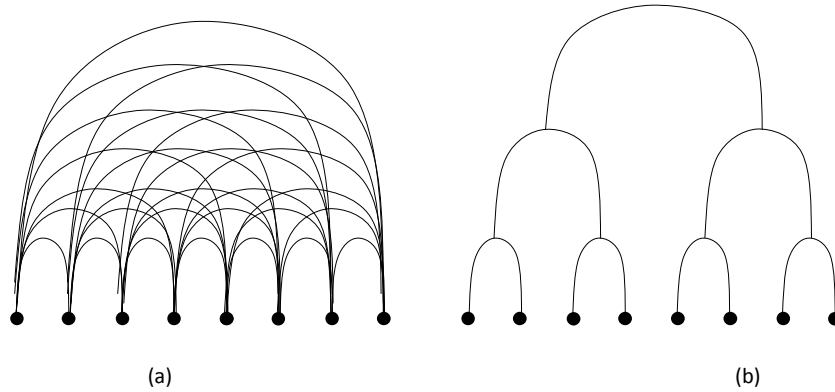
$$T(\mathbf{u}) = \int_L T(\mathbf{q})K_Q(\mathbf{u}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \int_L q(\mathbf{q})K_T(\mathbf{u}, \mathbf{q})dL_{\mathbf{q}} + \iint_{\Lambda} q_v(\mathbf{v})K_T(\mathbf{u}, \mathbf{v})d\Lambda_v \quad (5)$$

3 Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych

3.1 Charakterystyka wielobiegunowej metody elementów brzegowych

Pomimo łatwości w generowaniu siatki w MEB, na komputerach klasy PC przez wiele lat w zagadnieniach o skomplikowanych kształtach metoda była ograniczona do kilku tysięcy elementów. Wynikało to z generowania przez metodę pełnej i niesymetrycznej macierzy oraz ilości operacji niezbędnych do rozwiązania układu równań.

Na rysunku 1a przedstawiono porównanie szybkiej wielobiegunowej metody elementów brzegowych z konwencjonalną MEB.



Rys.1. Porównanie konwencjonalnej MEB (a) z szybką wielobiegunową MEB (b)

Fig.1. A graphical illustration of the conventional BEM (a) and the fast multiple BEM (b)

Na rysunku 1b przedstawiono podstawową zasadę redukcji ilości operacji numerycznych w szybkiej wielobiegunowej metodzie elementów brzegowych. Jądro całkowe (rozwiązanie podstawowe) może być zapisane w formie (6):

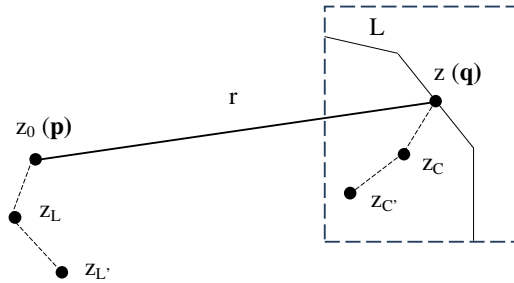
$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \sum_i K_i^p(\mathbf{p}, \mathbf{q}_c) K_i^q(\mathbf{q}, \mathbf{q}_c) \quad (6)$$

gdzie \mathbf{p} jest punktem ustalonym numerycznego całkowania, natomiast punkt \mathbf{q}_c jest punktem bieżącym. Jądro całkowe (6) może zostać wyznaczone kilkoma sposobami.

Jedną z metod jest rozwinięcie funkcji (6) w szereg Taylora. Korzystając z zależności (5) funkcję podcałkową łącznie z jądrem całkowym można przedstawić w postaci (7):

$$\int_L T(\mathbf{q}) K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) dL(\mathbf{q}) = \sum_i K_i^p(\mathbf{p}, \mathbf{q}_c) \int_L K_i^q(\mathbf{q}, \mathbf{q}_c) T(\mathbf{q}) dL(\mathbf{q}). \quad (7)$$

W konwencjonalnej metodzie MEB zmiana położenia punktu źródłowego \mathbf{p} wymaga ponownego wyznaczenia całki. W szybkiej wielobiegunowej metodzie elementów brzegowych punkt źródłowy \mathbf{p} jest położony poza linią brzegową L . Wartość całki po prawej stronie wyrażenia (7), jest wyznaczana jeden raz, jako niezależna od położenia punktu źródłowego \mathbf{p} .



Rys.2. Punkt źródłowy i polowy w szybkiej wielobiegunowej MEB

Fig.2. Source point and pole point in the fast multiple BEM

Wprowadzając poniższą notację, punkt źródłowy \mathbf{p} zostaje zastąpiony:

$$\mathbf{p} \Rightarrow z_0 = x_1 + ix_2 \quad (8)$$

oraz

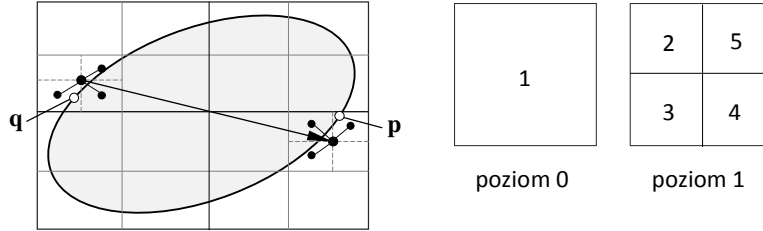
$$\mathbf{q} \Rightarrow z = y_1 + iy_2, \quad (9)$$

gdzie $i = \sqrt{-1}$. Na podstawie [5], używając liczb zespolonych rozwiązanie podstawowe można zapisać jako:

$$K(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \text{Re}\{G(z_0, z)\} \quad (10)$$

$$G(z_0, z) = -\frac{1}{2\pi} \log |(z_0 - z)|$$

3.2 Dyskretyzacja obszaru



Rys.3. Położenie elementów w obszarze prostokąta w szybkiej wielobiegunowej MEB
Fig.3. Location of elements in the area of the rectangle in the fast multiple BEM

Cały analizowany obszar brzegowy wpisuje się w prostokąt. Prostokąt dzielony jest na cztery mniejsze prostokąty. Każdy z powstałych w ten sposób prostokątów dzielony jest ponownie na kolejne cztery mniejsze prostokąty do momentu, gdy najmniejszy z prostokątów zawiera liczbę elementów brzegowych nie większą od ustalonej liczby. Powstała struktura nazywana jest drzewem. Każdy krok, w którym następuje podział prostokąta na mniejsze prostokąty, nazywany jest węzłem drzewa. Prostokąty, które są najmniejsze na danym poziomie, nazywane są liśćmi (ang.: *leaf*). Każdemu węzłowi drzewa przyporządkowany jest zbiór współczynników rozwinięcia.

3.3 Transformacja M2M

Całkę występującą w równaniu (7) można zapisać w postaci:

$$\int_L G(z_0, z) T(z) dL(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} O_k(z_0 - z_c) M_k(z_c) \quad (11)$$

$$M_k(z_c) = \int_L I_k(z_0 - z_c) T(z) dL(z); \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Moment M_k jest momentem względem punktu z_c .

Wyznaczane są momenty na wszystkich komórkach, na wszystkich węzłach drzewa od poziomu $i \geq 2$. Dla prostokątów „liści” z zależności (11), gdzie punkt z_c jest centrum prostokąta (komórki). Dla komórek leżących wyżej w strukturze drzewa używana jest transformacja M2M – „wielobiegunowy-wielobiegunowy” (ang.: *moment to moment*) z zależności:

$$M_k(z_c') = \sum_{l=0}^k I_{k-l}(z_c - z_c') M_l(z_c) \quad (12)$$

3.4 Transformacja M2L i L2L

Po transformacji współczynników wielobiegunowych komórek leżących w obszarze odległym wyznaczane są współczynniki rozwinięcia lokalnego, od węzła drugiego w kierunku komórek-„liści”. Jest to transformacja M2L (ang.: *moment to local*) wyrażona w postaci:

$$L_1(z_L) = (-1)^l \sum_{k=0}^{\infty} O_{l+k}(z_L - z_C) M_k(z_C) \cdot \quad (13)$$

Kolejne etapy to wyznaczenie współczynników lokalnych, pochodzących od punktów całkowania leżących w obszarach odległych, z zależności:

$$L_1(z_L') = (-1)^l \sum_{m=1}^p I_{m-1}(z_L' - z_L) L_m(z_L) \cdot \quad (14)$$

Jest to transformacja L2L (ang.: *local to local*) – „lokalny-lokalny”.

3.5 Wyznaczanie całek

Po uwzględnieniu podziału obszarów na bliskie i dalekie równanie (4) w postaci macierzowej można zapisać jako:

$$\mathbf{H}^{bl} \mathbf{U} + (\mathbf{H} \mathbf{U})^{odl} = \mathbf{G}^{bl} \mathbf{T} + (\mathbf{G} \mathbf{T})^{odl} \cdot \quad (15)$$

Powstałe macierze są rzadkie. W zależności od geometrii mogą mieć strukturę pasmową lub blokową. Poniżej, przedstawiono przykładową macierz w metodzie szybkiej wielobiegunowej MEB (15a) oraz klasycznej MEB (15b).

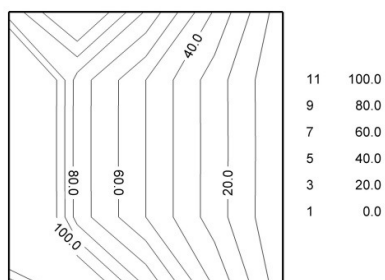
$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & A_N \end{bmatrix}, \quad (15a)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & \dots & A_{1N} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & \dots & A_{2N} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & \dots & A_{3N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{N1} & \dots & \dots & \dots & A_{NN} \end{bmatrix}. \quad (15b)$$

4 Dokładność rozwiązania – przykłady obliczeniowe

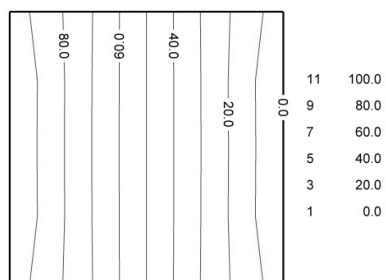
W celu porównania dokładności rozwiązania szybkiej wielobiegunowej MEB oraz konwencjonalnej MEB wyznaczono wartości temperatur w punktach wewnętrznych analizowanego obszaru (kwadrat o boku 1x1m), przy różnym stopniu podziału linii brzegowej, dla założonych warunków brzegowych. Porównano dokładność rozwiązania dla punktów znajdujących się blisko brzegu obszaru. Dodatkowo porównano czas obliczeń obu metod.

Warunek brzegowy dla obszaru: dolna i górna krawędź – warunek brzegowy Neumanna – strumień ciepła $q=0$ W/m; krawędź lewa – warunek brzegowy Dirichleta, $T=100^{\circ}\text{C}$, krawędź prawa – 0°C .



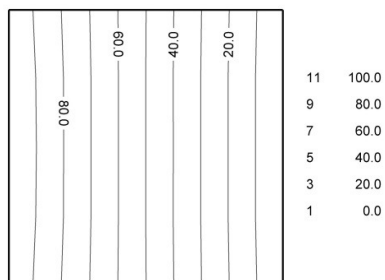
Rys. 4. Pole temperatury wyznaczone metodą klasyczną MEB – 16 paneli

Fig. 4. Temperature field calculated by the conventional MEB – 16 panels



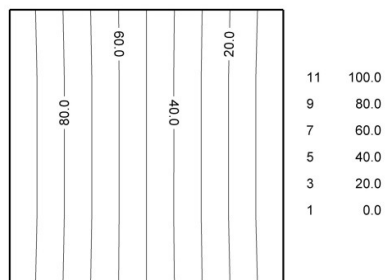
Rys. 5. Pole temperatury wyznaczone szybko wielobiegunowa MEB – 16 paneli

Fig. 5. Temperature field calculated by the fast multipole BEM – 16 panels



Rys. 6. Pole temperatury wyznaczone metodą klasyczną MEB – 100 paneli

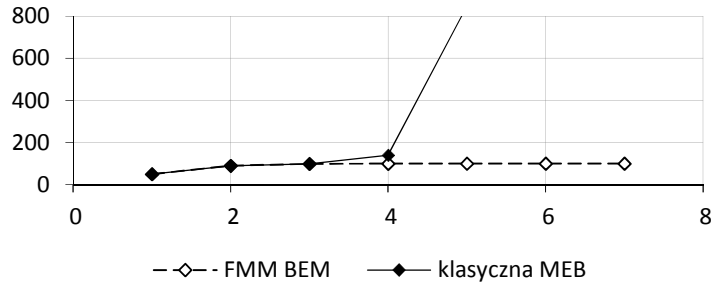
Fig. 6. Temperature field calculated by the conventional MEB – 100 panels



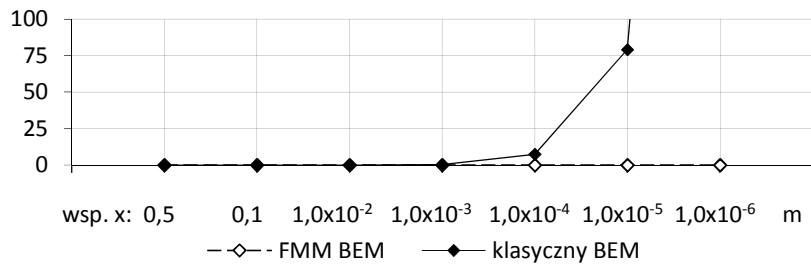
Rys. 7. Pole temperatury wyznaczone szybko wielobiegunowa MEB – 100 paneli

Fig. 7. Temperature field calculated by the fast multipole BEM – 100 panels

Analizując wykresy pól temperatury (rys. 4-7), można zaobserwować zdecydowanie wyższą dokładność metody szybkiej wielobiegunowej MEB dla małej liczby paneli na linii brzegowej (rys. 4-5).



Wyk. 1. Wartości temperatury w wybranych punktach dla 16 paneli na brzegu dla klasycznej i szybkiej wielobiegunowej MEB
 Graph 1. The temperature value at selected points for 16 boundary panels for conventional and fast multipole BEM



Wyk. 2. Błąd względny rozwiązania w wybranych punktach dla 16 paneli na brzegu dla klasycznej i szybkiej wielobiegunowej MEB
 Graph 2. The relative error solutions at selected point for 16 boundary panels for conventional and fast multipole BEM

Tab. 1. Wartości rozwiązania zagadnienia przy różnym stopniu dyskretyzacji linii brzegowej
 Tab. 1. The solution with different discretization of boundary line

Wsp. x	16 panels		100 panels		1 000 panels		2 000 panels	
	BEM	FMM	BEM	FMM	BEM	FMM	BEM	FMM
5,0x10 ⁻¹	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00	50,00
1,0x10 ⁻¹	90,03	90,03	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00	90,00
1,0x10 ⁻²	98,98	98,98	99,00	99,00	99,00	99,00	99,00	99,00
1,0x10 ⁻³	139,68	99,87	99,94	99,90	99,90	99,90	99,90	99,90
1,0x10 ⁻⁴	846,95	99,96	183,80	99,99	100,30	99,99	99,99	99,99
1,0x10 ⁻⁵	8 008,2	99,97	1 323,9	99,99	183,8	99,99	1 262,4	99,99
1,0x10 ⁻⁶	79628,0	99,97	12783,0	100,00	1 323,9	100,00	6 879,3	100,0

Wartości rozwiązania zagadnienia dla różnego stopnia dyskretyzacji linii brzegowej przedstawiono w tabeli 1. Czas obliczeń dla różnego stopnia dyskretyzacji przedstawiono w tabeli 2.

Tab. 2. Czas obliczeń obu metod przy różnym stopniu dyskretyzacji linii brzegowej

Tab. 2. Calculation time with different discretization of boundary line

	<i>Liczba paneli</i>	<i>Czas obliczeń [s]</i>	
		BEM	FMM
1	16	0,0	0,00
2	100	0,1	0,02
3	1 000	3,4	0,13
4	2 000	36,2	0,33
5	4 000	330,1	1,08

5 Wnioski

W przykładzie porównywano wyniki rozwiązania problemu dwuwymiarowego procesu ustalonego przewodzenia ciepła. Dobrano kilka punktów wewnętrznych w centrum obszaru oraz kilka punktów znajdujących się blisko brzegu.

Dla punktów oddalonych od brzegu prostokąta, np.: dla punktu centralnego, obie metody wykazują bardzo wysoką dokładność, nawet przy stosunkowo małej liczbie paneli na brzegu obszaru (16 elementów). W obu przypadkach wartość obliczona wynosi 50,00°C. Przy zbliżaniu się punktów wewnętrznych do brzegu obszaru, zdecydowanie wyższą dokładność posiada szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych (ang.: *Fast Multipole Boundary Element Method*), co widoczne jest na wykresie 1. W metodzie tej dla każdego punktu wewnętrznego obszaru również tych znajdujących się stosunkowo blisko brzegu, dokładność jest bardzo wysoka. Błąd względny nie przekracza 0,03%. Dla odległości 0,000001 m od brzegu obszaru, przy długości boku prostokąta 1 m, temperatura T wynosi 99,97°C (rozwiązanie analityczne dla jednowymiarowego przepływu ciepła to 99,99°C).

Wadą klasycznej metody elementów brzegowych jest niedokładność numerycznego rozwiązania przy brzegu, wynikająca z osobliwości rozwiązania podstawowego, gdy wartość funkcji rośnie do nieskończoności dla argumentu dążącego do zera. Wartości temperatur dla wybranych punktów obszaru przedstawia tabela 1. Dla małej liczby paneli (16 elementów) dokładność, jaką można uznać za poprawną, dotyczy punktu znajdującego się w odległości 0,01 m od brzegu. Dalsze zbliżanie się do brzegu obszaru daje wyniki obarczone bardzo dużym błędem. Podział obszaru na 4 000 elementów poprawia dokładność obliczeń dla punktu znajdującego się w odległości 0,0001 m. W tym przypadku jest to granica krytyczna. Dalsze zbliżanie się do brzegu powoduje wysoki błąd rozwiązania.

Porównując czasy obliczeń (tabela 2), szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych jest zdecydowanie szybszą metodą. Czas obliczeń dla 4 000 stałych elementów brzegowych wynosi około 1 s, gdzie czas obliczeń w klasycznej metodzie MEB wynosi około 330 s. Oczywiście podane czasy są orientacyjne i mogą różnić się

od zastosowanego algorytmu dla danej metody.

Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych, w porównaniu do klasycznej metody elementów brzegowych, jest metodą efektywniejszą, pozwalającą modelować większe układy [5].

Literatura

1. Brebbia C.A., Telles J.F.C., Wrobel L.C.: *Boundary Element Techniques. Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, NY, 1984
2. Katsikadelis J.T.: *Boundary elements: Theory and Applications*, Elsevier Science Ltd, 2002
3. Majchrzak E.: *Metoda elementów brzegowych w przepływie ciepła*, Wyd. Pol. Częstochowskiej, 2001
4. Ptaszny J., Fedeliński P.: Szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych dla dwuwymiarowych zagadnień elastostatyki, *Modelowanie Inżynierskie*, 32, s. 407-414, Gliwice, 2006
5. Yijun Liu: *Fast Multipole Boundary Element Method. Theory and Applications in Engineering*, Cambridge University Press, 2009

Streszczenie

W pracy przedstawiono porównanie dokładności rozwiązania dwuwymiarowego pola temperatury przy wykorzystaniu klasycznej metody elementów brzegowych oraz szybkiej wielobiegunowej metody elementów brzegowych (ang.: *Fast Multipole Method* FMM). Porównano rozwiązanie zagadnienia przy różnym stopniu dyskretyzacji linii brzegowej. Przedstawiono czas obliczeń dla obu metod.

Słowa kluczowe: metoda elementów brzegowych, szybka wielobiegunowa metoda elementów brzegowych, dokładność rozwiązania

The accuracy of solutions in conventional and fast multipole boundary element method

Abstract

The purpose of this article is to attempt to compare the accuracy of numerical solution for the conventional and fast multipole boundary element method, with different panels number on boundary area. The paper presents a comparison of the accuracy of solutions for interior points and especially the points located near the edge of the area. The calculation time were compared.

Keywords: conventional BEM, fast multipole method, accuracy of the solution